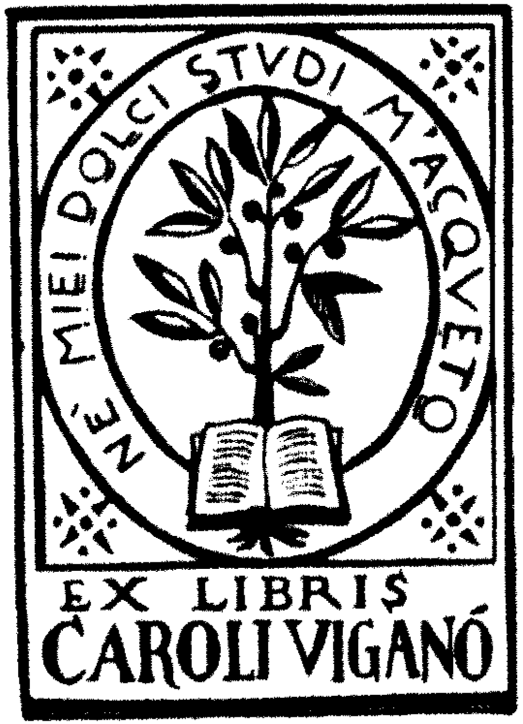


COMPENDIO DELLE SEZIONI CONICHE D'APOLLONIO

Con aggiunta di nuove proprietà delle
medeſime Sezioni

COMPILATO DAL P. ABATE

D. GUIDO GRANDI

Teologo,e Mattematico di S.A.R.

E dello Studio Piſano.

IN FIRENZE. M.DCC.XXII.

Nella Stamp.di S.A.R.Per gli Tartini,e Franchi
Con licenza de' Superiori.

ALLA STUDIOSA GIOVENTU.

SE ne' paſſati tempi fu neceſſariſſima la Scienza delle Sezioni Coniche, per chi voleva alquanto inoltrarſi nel vaſto campo della Geometria, adeſſo è neceſſaria ancora per le Scienze Fiſiche, da che il gran Galileo, e dopo eſſo molti moderni, hanno moſtrato quanto di eſſe Sezioni, e della parabola in particolare ſi ſerva in ogni occaſione la natura. Talchè è del tutto impoſſibile intendere, e penetrare i ſecreti della medeſima, ſenza ſapere le principali proprietà di queſte linee. Vero è che ritraeva molti da sì fatto ſtudio l' aver Apollonio trattata tanto diffuſamente queſta materia, che ſgomentava chiccheſſia dall' intraprenderne la ſpiegazione. Eſſendoci pertanto venuto alle mani queſto breve Compendio di eſſo Apollonio dettato per uſo de' ſuoi ſcolari dal Padre

Aba-

Abate D. Guido Grandi, il cui nome per le maraviglioſe ſue opere è già per tutta Europa famoſo, abbiamo reputato di fare coſa grata inſieme, ed utile al pubblico col darlo alle ſtampe. L' Autore iſteſſo ci ha maggiormente animati a far ciò, il quale richieſtone della permiſſione, non ſolo ce l' ha conceduta, come Anima gentile,

Che fa ſua voglia della voglia altrui;

ma anco nel tempo ſteſſo, che queſt' operetta era ſotto i torchj, l' ha voluta accreſcere di buon numero d' aſſai giovevoli dimoſtrazioni. In queſto Compendio adunque, ſiccome troverai tolto via tutto ciò che di ſuperfluo ſi trova, in chi ha per lo innanzi trattata queſta materia, così vedrai non ci mancar niente, che poſſa per gli ſtudj Fiſici, e Geometrici eſſer neceſſario. Ci troverai ancora molte coſe dimoſtrate da Archimede, con apparato maggiore di molte dimoſtrazioni precedenti, e ſecondo il metodo degli Antichi, provate quì con mirabil brevità, e chiarezza, col metodo degli indiviſibili, tanto promoſſo dal Cavalerio, e dal Torricelli, del qual metodo, e di quello degli infinitamente piccoli, che è tanto in uſo preſſo i moderni (eſſendo adoperato nella prop. 44. di queſto) ne potrai prendere in queſta ſteſſa operetta qualche notizia. Vivi felice.

TRATTATO
DELLE
SEZIONI CONICHE

DEFINIZIONI PRIME

I.

SE per un punto A, poſto fuori del piano d' un cerchio BED, paſſi la retta BAF indefinitamente prolungata; e ſtando fiſſo il medeſimo punto A, ſi muova la retta AB per la circonferenza del ſuddetto cerchio BED continuamente radendolo, finchè ritorni *Fig. 1.*

al primiero poſto, onde cominciò a muoverſi; l'una, e l'altra ſuperficie, che quindi ne naſce di ſopra, e di ſotto dal punto A, diceſi ſuperficie conica.

II.

Ed il ſolido compreſo da una di dette ſuperficie, e dal cerchio BED, o da qualſivoglia altro, che ne fuſſe interſecato, chiamaſi cono.

III.

La cima del cono, e della ſuperficie conica è il punto A.

IV.

La baſe è il cerchio BDE, o qualunque altro ſimil cerchio, che intercetto dalla ſuperficie conica, terminaſſe il cono.

V.

La retta AC, che congiunge la cima del cono col centro della baſe, diceſi aſſe del cono.

VI.

Quando l'aſſe AC è perpendicolare al pian della baſe, chiamaſi il cono retto.

VII.

Ma quando l'aſſe è inclinato al pian della baſe, diceſi il cono ſcaleno.

Corollari.

I.

E' manifeſto per queſta generazione, che l'una, e l'altra delle ſuperficie coniche creſce in infinito, di ſopra, e di ſotto dal punto A.

II.

Se dalla cima A ſi tira una linea retta, a qualunque punto H preſo nella ſuperficie conica, queſta linea retta caderà nella data ſuperficie, imperocchè quando la retta A B, generando la ſuperficie conica, ſi muove all' intorno, dovrà urtare una volta nel punto H di detta ſuperficie, e però dovrà convenire, colla retta medeſima H A.

III.

Onde qualunque retta A H, che congiunga la cima A con un punto H della ſuperficie conica, prolungandoſi dovrà neceſſariamente battere nella circonferenza della baſe, come ſarebbe nel punto E.

IV.

La retta, che congiunge due punti H I preſi nella ſuperficie conica, ſe non paſſa per la cima A cade tutta dentro del cono; imperocchè congiungendoſi alla cima A le rette A H, A I, prolungate terminino alla periferia della baſe, come ne' punti E, B, e la retta E B, che gli congiunge caderà dentro al circolo; dunque il piano del triangolo A B E, s' immerge dentro al cono, e però la retta H I, che giace in queſto piano, ſarà dentro il cono.

per la 2. del 3. d' Eucl.

Eucl. lib.11. prop.2.

V.

Se il cono ſi tagli per un piano, che paſſi per la cima A, la ſezione A B E, ovvero A B D ſarà un triangolo, perchè tanto la linea A B, quanto A E, ſono rette, e ſimilmente è retta la linea A D, dovendo neceſſariamente convenire con quella retta, che nel muoverſi genera la ſuperficie del cono, ed anche la linea B E, e la B D ſono rette, per eſſer communi ſezioni del piano ſegante, e della baſe del cono, dunque A B E, ovvero A B D è un triangolo.

Eucl. lib.11. prop.3.

Propoſizione I.

Se il cono A B D, ovvero il ſuo contrappoſto, ſi ſeghi col piano F G H parallelo alla baſe B D E, la ſezione ſarà un cerchio.

Fig.1.

Sia l'aſſe C A, per cui condotto il piano A B D ſi formerà un triangolo, le di cui ſezioni comuni co' piani paralleli B D E, F G H, ſaranno no le rette BD, FG, parallele; *prop. 16 del l' 11. d'Eucl.* preſo poi qualſivoglia punto H nel contorno della ſezione FHG ſi congiunga AH, la quale prolungata dovrà convenire colla circonferenza della baſe nel punto E. Si congiunga EC, e la linea retta HL *3. Corol. di queſto* ſia la comune ſezione del piano FGH col triangolo AEC; conſeguentemente ſarà EC parallela ad HL; dunque la ragione di BC, ad *per la 16. del 11.* FL, è la medeſima colla ragione di CA ad AL, e queſta è pur la medeſima con quella di EC ad HL, e però BC ad FL ſarà co- *per la 2. del 6.* me EC ad HL, e perchè la prima BC uguaglia la terza EC eſſendo condotte dal centro C alla periferia *per la 11. del 5.* della baſe; ancora la ſeconda FL, ſarà uguale alla quarta HL. Nella ſteſſa maniera qualunque altra linea condotta dal punto L al contorno *per la 14. del* della ſezione FHG ſi dimoſtrerà uguale alla medeſima FL; dunque la predetta ſezione è un cerchio; il che dovevaſi dimoſtrare.

Corollari.

I.

E' manifeſto, che il diametro del cerchio FHG è la retta FG parallela al diametro della baſe BD, e che è la comun ſezione del piano ſegante, e dell' altro, che paſſa per l' aſſe.

II.

E che il centro del medeſimo cerchio FHG, è il punto L, in cui l' aſſe AC concorre col piano ſegante.

III.

E che la porzione AFHG è pure un cono ſimile all' altro ABED per eſſere l' altezze loro proporzionali a' diametri delle baſi. *def. 24. del 11. d' Eucl.*

IV.

E finalmente che l' aſſe del cono paſſa per gli centri di tutti i cerchi paralleli alla baſe.

❧

Propoſizione II.

Fig. 3. Se un cono ſcaleno A B E D ſi ſeghi con un piano, che paſſi per l'aſſe A C, che ſia retto al piano della baſe B E D, onde provenga il triangolo A B D poſcia ſi ſeghi con un piano retto al piano del dato triangolo, il quale da eſſo tagli il triangolo A K M ſimile al B A D, ma con gli angoli poſti ſubcontrariamente, ſicchè l'angolo A K M uguagli l'angolo A D B, la ſezione quindi reſultante nella ſuperficie del cono ſarà pure un cerchio K H M

Prendaſi nel contorno della ſezione qualunque punto H, e quindi ſi conduca la H I perpendicolare al piano A D B che caderà nella comun ſezione K M, e per lo punto I tiriſi N I L parallela a B D; dunque il piano condotto per le N L, I H, ſarà parallelo al piano della baſe, che paſſa per B D, e per qualunque linea F E perpendicolare ad eſſa B D, e conſeguentemente parallela ad H I; onde ſarà un cerchio, il cui centro P è nell'aſſe A C; congiungaſi ora H P, ed H O al punto di mezzo della linea K M, ſarà il quadrato P H uguale al quadrato P L, e queſti uguale al rettangolo N I L col quadrato P I, ma quello è eguale a' quadrati H I, P I, e però queſti due quadrati uguagliano il rettangolo N I L col quadrato I P trattone di comune il quadrato I P, ſarà il rettangolo N I L uguale al quadrato H I, ma per l'ugualità dell'angolo A N L con A B D, cioè con A M K i triangoli K I N, M I L, contrappoſti con gli angoli alla cima uguali in I debbono eſſer ſimili, onde N I ad I K, ſarà come M I ad I L, ed il rettangolo N I L ſarà

per la 38. del 11.

per la 15. del 11.

per l' antec.

per la 5. del 2

per la 47. del prim.

per la 4. del 6.

per la 14. del 6.

rà uguale al rettangolo KIM, dunque queſto rettangolo KIM, uguaglierà il quadrato HI, ed aggiunto il quadrato IO ſarà il rettangolo KIM col quadrato IO cioè il ſolo quadrato OM, uguale a' quadrati HI, IO, cioè al quadrato OH, dunque la retta OH ſarà uguale ad OM, e potendoſi lo ſteſſo moſtrare dell'altre ne ſegue, che la ſezione KHM è un cerchio, il cui centro O, come ſi doveva dimoſtrare.

Corollari.

I.

Quindi ſi raccoglie, che il quadrato di qualſivoglia perpendicolare al diametro del circolo uguaglia il rettangolo contenuto da' ſegmenti del diametro; e viceverſa, ſe in una figura il quadrato di qualunque perpendicolare alla baſe, ſi trovi eſſer ſempre uguale al rettangolo de' ſegmenti di eſſa baſe, quella figura ſarà un circolo.

II.

Se il piano ſegante KHM non foſſe parallelo alla baſe, nè poſto ſubcontrariamente, la ſezione non ſarà mai un circolo, perchè ſe l'angolo AMK non uguaglia l'angolo ABD, cioè l'angolo ANL, non ſaranno i triangoli KIN, LIM, ſimili, e però non potrà eſſere KI, ad IN, come, LI, ad IM, e così il rettangolo NIL, cioè il quadrato IH non ſarà uguale al rettangolo KIM, e però la figura KHM non ſarà un cerchio.

Propoſizione III.

Fig. 4.

Se il cono ABD vien ſegato dal triangolo per l'aſſe, e da qualſivoglia punto H della ſuperficie conica ſi tirerà una retta HIL parallela alla retta perpendicolare ſopra il diametro della baſe, ſarà la retta HL diviſa per

mezzo dal piano di detto triangolo.

Si congiunga AH, la quale prolungata ſeghi la baſe in M, e ſi conduca MKG parallela ad EF, la quale ſarà diviſa per mezzo in K dal diametro, e concorrerà in G dall'altra parte della circonferenza, e ſi congiunga AG; perchè le rette HL, MG, ſono parallele alla medeſima, EF ſaranno parallele altresì tra di loro, e però ſaranno
prop. nel medeſimo piano del triangolo
9 del 11. AMG, dunque la retta HL dee convenire colla retta AG in L, e congiunta AK ſarà come MK a KG, così HI ad IL, ma la pri-
prop. 2. del 6. ma, e la ſeconda ſono uguali, dunque ancora la terza, e la quarta ſono uguali, e però la retta HL reſterà diviſa per mezzo dalla retta AK, che è nel piano del triangolo per l'aſſe, il che, ec.

Corollario.

Quindi ſi raccoglie, che ſe un cono ſegato prima col triangolo per l'aſſe, ſi taglierà con un piano, che paſſi per una retta MG perpendicolare al diametro della baſe, la cui comune ſezione col triangolo ſuddetto ſia la retta AK, queſta taglierà per mezzo tutte le linee, come HL condotte parallele ad MG dentro la medeſima ſezione.

Definizioni Seconde.

I.

La linea NK, che taglia per mezzo tutte le HL parellele ad una determinata MG dentro una figura come GNM, ſi chiami diametro della ſteſſa figura. *Fig. 5.*

II.

Il termine del diametro cioè il punto N, è la cima di eſſa figura.

III.

Qualunque retta diviſa per mezzo dal diametro ſi dica ordinata al medeſimo diametro.

IV.

Se il diametro NK oltre il tagliar per mezzo le ſue ordinate, le taglierà ad angoli retti, ſi dirà aſſe della figura.

Propoſizione IV.

Fig. 6.

Se la comune ſezione del piano ſegante MNG, come ſopra, e del triangolo per l'aſſe del cono ABD, cioè il diametro NK riuſcirà pa-

rallelo ad uno de' lati AB del medeſimo triangolo; i quadrati dell'ordinate al diametro ſaranno proporzionali alle parti di eſſo diametro tagliate dalla cima comune N, e chiameraſſi la ſezione Parabola.

Si tiri per lo punto I, dove l'ordinata HL concorre col diametro, la retta VIP parallela al diametro della baſe DB, è manifeſto, che il piano condotto per le rette VP, HL, ſarebbe un circolo per eſſer parallelo alla baſe, che paſſa per le rette DB, MG, parallele reſpettivamente all'altre due, e però il quadrato MK ſarà uguale al rettangolo DKB, ed il quadrato HI uguale al rettangolo VIP, onde il quadrato MK, al quadrato HI ſtarà, come il rettangolo DKB, al rettangolo VIP, ma per eſſere i lati oppoſti del parallelogrammo KB, IP, uguali, il primo rettangolo al ſecondo, ſta come DK, ad VI, cioè come KN,

per la prima di queſto

Corol. 1 della 2. di queſto

1. del6.

NI, dunque i quadrati dell' ordinate MK, HI, ſono come le parti del diametro KN, NI, tagliate dalla comune cima N, il che ſi doveva dimoſtrare; e queſta è la proprietà eſſenziale della Parabola.

Propoſizione V.

Fig. 7. **Poſte le ſteſſe coſe, ſe il diametro KN concorrerà con uno de' lati del triangolo per l'aſſe del cono prolungato oltre la cima di eſſo come in Q, ſaranno i quadrati dell' ordinate, come i rettangoli contenuti dalle parti del diametro intercette fra le medeſime ordinate, ed i due termini N, Q, e prolungato il medeſimo piano farà nel cono contrappoſto una ſimile ſezione dotata d'una iſteſſa proprietà: ſi chiami ciaſcuna di dette ſezioni, Iperbole, e l'una e l'altra inſieme Iperbole oppoſte, e la retta NQ intercetta fra le due cime di queſte iperbole, chiamiſi il lato traſverſo delle medeſime.**

Condotta dal punto I dove concorre l'ordinata HL col diametro, la retta VIP parallela a BD, come ſopra, eſſendo il quadrato MK uguale al rettangolo DKB, ed il quadrato HI uguale al rettangolo VIP, ſarà il primo quadrato al ſecondo, come il primo rettangolo al ſecondo, e però ſarà in ragione compoſta di quella, che ha il lato DK, al lato VI (cioè di KN a NI) e di quella, che ha il lato KB al lato IP (cioè di KQ a QI) delle quali ragioni ſi compone ancora la ragione del rettangolo QKN, al rettangolo QIN, dunque il quadrato MK, al quadrato HI ſta come il rettangolo QKN, al rettangolo QIN, cioè i quadrati dell' ordinate ſono come i ret-

coroll. della 2. di queſto

per la 4. del 6.

per la 23. del 6.

i rettangoli delle parti del diametro intercette fra le ſteſſe ordinate, ed i termini QN, del lato traſverſo. Or queſta ſezione, che ha queſte proprietà, chiamaſi Iperbole; ed è manifeſto, che concorrendo il diametro KN col lato BA prolungato in Q, il piano, che fa la ſezione taglierebbe il cono contrappoſto con un altra ſezione XQR il di cui diametro OQ ſimilmente concorre col lato YA prolungato in N, e però è un iperbole della ſteſſa proprietà dell'altra; anzi paragonandoſi i quadrati dell'ordinate dell'una, a' quadrati dell'ordinate nell'altra, ſi proverà, come ſopra, eſſere eſſi proporzionali a' rettangoli contenuti dalle parti del diametro, intercette fra le dette ordinate di queſta iperbole, oppoſte agli ſteſſi termini del lato traſverſo, come è facile farvi l'applicazione, adoperando in vece dell' ordinata HI l'ordinata di lettere minuſcole *b i*, e paragonandola all' ordinata medeſima MK, ec.

Propoſizione VI.

Fig. 8.

Ma ſe la comun ſezione del piano ſegante KN concorrerà con ambedue i lati del triangolo, che paſſa per l'aſſe, ſotto l'angolo della cima del cono ne' punti NQ, allora i quadrati dell'ordinate HI, MK ſaranno fra di loro, come i rettangoli QIN, QKN fatti dalle parti del medeſimo diametro. E queſta ſezione (quando per altro non ſia parallela alla baſe, nè poſta ſubcontrariamente) chiamaſi Elliſſe, il cui lato traſverſo ſarà il medeſimo diametro QN.

Ciò ſi prova applicando la dimoſtrazione precedente a queſta figura.

Propoſizione VII.

Fig. 9. Sia la parabola GNM il cui diametro NK, e ſi faccia, come NK all'ordinata KM, così queſta ad un' altra linea NF, dico che tirando qualſivoglia ordinata HI ſarà uguale il quadrato HI al rettangolo INF contenuto dalla porzione del diametro IN intercetto fra la cima, e la detta ordinata, e dalla medeſima coſtante linea NF, la quale quindi innanzi ſi chiamerà lato retto, ovvero parametro della propoſta parabola.

per la 4. di queſto per la 7. del 6. Poichè il quadrato MK, al quadrato HI ſta come KN ad NI, cioè prendendo di comune altezza la linea NF, ſta come il rettangolo KNF al rettangolo INF: ſiccome il primo quadrato MK uguaglia il primo rettangolo KNF per eſſere le linee NK, KM, NF, continovamente proporzionali, così il ſecondo quadrato HI pareggerà il ſecondo rettangolo INF contenuto dalla porzione del diametro IN corriſpondente alla detta ordinata, e dalla ſteſſa linea NF, che diceſi lato retto ovvero parametro della propoſta ſezione; il che ſi doveva, ec.

Propoſizione VIII.

Fig.10. Nell'iperbola MNG il cui diametro KN, ed il lato traſverſo QN; ſe ſi farà come il rettangolo QKN al quadrato MK così la linea QN alla NF, poſta perpendicolarmente ad eſſa, congiungendo poi la QF, e prolungandola indefinitamente, e tirando ad NF parallele ID

KB,

KB, ſarà il quadrato HI uguale al rettangolo NID, ed il quadrato MK uguale al rettangolo NKB, i quali rettangoli ſono tutti applicati alla retta NF coll'altezza di quella porzione del diametro, che reſta intercetta fra le ordinate, e la cima N; ma nelle loro applicazioni eccedono di rettangoli FB, FD, ſimili, e ſimilmente poſti al rettangolo QNF. Chiamaſi la linea NF lato retto, ovvero parametro dell' iperbola, e la retta QFB la ſua regolatrice.

Eſſendo il rettangolo QKN al quadrato MK, come QN ad NF, *prop. 2 del 6.* cioe come QK a KB, oppure preſa di comune altezza NK, come il rettangolo QKN, al rettangolo NKB *prop. 1. del 6.* ſarà il quadrato MK, uguale in tanto al rettangolo NKB; e perchè il quadrato MK al quadrato HI

ſta come il rettangolo QKN, al rettangolo QIN, permutando il quadrato MK, al rettangolo QKN ſtarà come il quadrato HI, al rettangolo QIN, e la prima ragione è uguale a quella di NF a QN, ovvero di ID a QI; ſarà ancora la ſeconda ragione del quadrato HI al rettangolo QIN, uguale a quella della retta ID a QI, ovvero preſa di comune altezza IN, uguale a quella del rettangolo DIN al rettangolo QIN, e però il quadrato HI ſarà uguale al rettangolo DIN, ed è manifeſto, che queſti rettangoli BKN, DIN hanno per altezza e parti del diametro KN IN, e ſono applicati alla medeſima linea NF, eccedendo però de' rettangoli FB, FD, i quali ſono ſimili al *prop. 26. del 6.* rettangolo QNF contenuto dal traſverſo, e dal retto lato, eſſendo dintorno al medeſimo diametro, il che, ec.

* * *

Corollari.

I.

E' manifeſto, che i quadrati dell' ordinate HI ſtanno a' rettangoli contenuti dalle parti del diametro QIN, come il lato retto FN al traſverſo QN.

II.

Fig 11. Le ſezioni oppoſte XQR, MNG, hanno i lati retti QS, NF, uguali, perchè eſſendo il quadrato MK, al quadrato OX, come il rettangolo QKN, al rettangolo NOQ, ſarà ancora il lato retto FN al traſverſo NQ, come l'altro lato retto SQ, allo ſteſſo traſverſo QN, e però i lati retti NF, QS, ſono uguali.

Propoſizione IX.

Fig.12. Nell' elliſſe QMN ſe ſi farà come il rettangolo QKN al quadrato dell' ordinata corriſpondente KM, così la linea QN alla perpendicolare NF; e ſe ſi congiunga QF, e ſi tirino KB, ID, parallele ad NF, ſarà il quadrato MK uguale al rettangolo NKB, ed il quadrato HI uguale al rettangolo NID, i quali rettangoli hanno per altezza le parti del diametro tagliate dalla cima N, e ſono applicati alla medeſima linea retta NF, mancando però nell' applicazione de' rettangoli FB, FD, ſimili, e ſimilmente poſti a quello, che ſi contiene dalle rette QN, NF. Chiamaſi la linea NF lato retto, o pure Parametro dell' elliſſe, e la linea QF, Regolatrice.

Si dimoſtra applicando la ſteſſa

dimoſtrazione della precedente a queſta figura.

Corollario.

I quadrati dell' ordinate H I a' rettangoli delle parti del diametro N I Q ſtanno come il lato retto N F al traſverſo N Q.

Propoſizione X.

Fig. 13. **In qualſivoglia ſezione conica M N K la linea N F, che dalla cima N ſi tira parallela all' ordinata, tocca la ſezione.**

Prima defin. delle ſeconde

Imperocchè ſe la ſegaſſe, come fa N H, allora il diametro K N, non taglierebbe per mezzo tutte le parallele all' ordinate, il che è contro la definizione del diametro; dunque la N F tocca la ſezione, incontrandoſi con eſſa nel ſolo punto della cima N; il che, ec.

Propoſizione XI.

Fig. 14. 15. *e* 16.

In qualſivoglia ſezione conica N M, poſta la tangente dalla cima N, cioè N F, uguale al lato ſuo retto, e diviſa per mezzo in R, ſe nella parabola ſi tira R T parallela al diametro N K; ma nella iperbole, e nell' elliſſe diviſo per mezzo il traſverſo Q N in C ſi congiungerà C R; ordinata al diametro della ſezione qualſivoglia M K, e condotta K T parallela ad N R, ſarà ſempre il quadrato M K duplo del quadrilatero R N K T. Chiamiſi la retta R T, Semiregolatrice, ed il punto C, che taglia per mezzo il lato traſverſo dell' iperbole, e dell' elliſſe, chiamiſi Cen-

tro di tutte le ſezioni.

Per lo punto F ſi conduca la F B parallela ad R T, la quale nella parabola ſarà altresì parallela al diametro, e nell' altre ſezioni converrà con eſſo nel termine Q del lato traſverſo, onde ſarà la regolatrice, per eſſere N C ad N Q come N R ad N F; e ſi tiri B N, che ſarà *Eucl. lib. 6. p. 2.* ſegata per mezzo in S dalla linea R T, ſiccome F N è per mezzo ſegata in R dalla medeſima parallela ad F B, e però ſaranno uguali i triangoli B S T, N S R, avendo gli angoli alterni delle parallele R N, T B, e gli altri alla cima S, uguali, oltre il lato B S uguale ad S N; ſicchè aggiunto di comune, il quadrilatero S N K T, ſarà lo ſpazio R N K T uguale al triangolo N B K; *8 di queſto* ma il quadrato dell' ordinata M K eſſendo ſempre uguale al rettangolo N K B, è duplo del detto triangolo; dunque altresì è duplo del quadrilatero R N K T, il che, ec.

Propoſizione XII.

Fig. 17 18. e 19.

Dato in una ſezione il punto M, fuori della ſua cima, tirare da eſſo la tangente.

Tiriſi l'ordinata M K, il di cui quadrato ſarà eguale al doppio del quadrilatero R N K T determinato *per la anteced.* come ſopra dalla ſemiregolatrice R T; e pigliſi dopo le linee T K, K M, la terza proporzionale K G, congiungendo G M ſarà la tangente deſiderata.

Imperocchè ordinando ſopra, o ſotto qualunque altra H L, la quale concorra colla G M in P, e colla ſemiregolatrice in V, e congiunta altresì G T, che ſega la medeſima ordinata H L in D; eſſendo T K, K M, K G, continue proporzionali, *Eucl. lib. 6. prop. 17.* ſarà il quadrato M K uguale al rettangolo G K T, ma è doppio ancora del quadrilatero R N K T, ſarà dunque il triangolo G K T uguale al quadrilatero R N K T; ſicchè (nell'ordinata H L più vicina al punto G) cavando dal triangolo T K G il trapezio T D L K, minore del quadrilatero T K L V levato dallo ſpazio R V L N, rimarrà il triangolo G L D maggiore del quadrilatero V L N R, ed aggiungendo (in riguardo all'ordinata più lontana dal punto G, notata colle lettere minuſcole *b*, *l*) al detto triangolo il trapezio T *d l* K maggiore del quadrilatero *u l* K T da aggiungerſi allo ſpazio R N K T ſi farà ſempre il triangolo G *l d* maggiore del quadrilatero *u l* N R; ma ſiccome le rette T K, K M, K G, (ovvero *d l*, *l p*, *l* G) ſaranno, per la ſimilitudine de' triangoli, tra di loro proporzionali; ed il quadrato L P ſarà uguale al rettangolo G L D, cioè doppio del triangolo G L D, dunque L P è maggiore di H L, e però il punto P è di là dal punto H fuori della ſezione; ſimilmente eſſendo il quadrato *l p* doppio del triangolo G *l d* maggiore del quadrato *b l* doppio del quadrilatero *u l* N R ſi proverà il punto *p* eſſere oltre il punto *b* fuori della ſezione. Adunque tutti i punti della retta G M, fuori che il punto M, ſono di là dal contorno della ſezione, e però eſſa G M è tangente; il che ſi doveva, ec.

Corollarj.

I.

La tangente non concorre con veruna ſezione conica più che in un punto.

II.

Poſta nell'aſſe della ſezione la linea K S uguale a T K, e congiunta S M, ſarà queſta perpendicolare alla tangente G M, ed in conſeguenza alla curva nel punto M, per eſſere il quadrato M K uguale al rettangolo G K S, e però l'angolo M è retto, paſſando per li tre punti G, S, M un ſemicircolo.

Coroll. primo della 2. di queſto

III.

E perchè nella parabola la ſemiregolatrice è parallela al diametro, ma nell'altre ſezioni viene dal centro per lo punto di mezzo del lato retto, ne ſegue, che la KS intercetta fra l'ordinata, e la perpendicolare alla curva, dovendo eſſere uguale alla KT, ſarà ſempre nella parabola uguale ad RN metà del lato retto, ma nell'altre ſezioni ſarà alla detta RN come la CK diſtanza dell'ordinata dal centro, alla CN metà del lato traſverſo.

IV.

Eſſendo il quadrato MK uguale *Prop. 8. di queſto* al rettangolo BKN, ed anco al rettangolo TKG, ſaranno queſti due rettangoli fra di loro uguali, e però come BK a KT così GK a KN, onde nella parabola per eſſere BK doppia di KT, ſarà ſempre GK doppia di KN, ovvero di NG.

V.

Ma nell'altre ſezioni, GK ad NG, *Coroll. antec.* ſarà in ragione compoſta della dupla, e di quella di KQ a QN; perchè eſſendo BK a KT, come GK a KN, ſarà la KB alla BT, cioè alla FR, o pure alla RN come KG a GN, ma BK ad RN ha ragione compoſta di BK ad FN, e di FN ad NR, delle quali ragioni la prima è quella di KQ a QN, e la ſeconda è ragione dupla; dunque KG a GN è in ragione compoſta di KQ a QN, e della dupla.

VI.

Eſſendo KT a TB come KN ad NG, ſarà ancora KS, cioè l'intercetta fra la perpendicolare, e l'ordinata, alla metà RN del lato retto, come KN ad NG.

VII.

Nella parabola, tirata per M la MA parallela al diametro, che ſega la tangente della cima N in A, ſarà KM ovvero NA doppia di NE, ſiccome KG è doppia di GN.

VIII.

Nell' altre ſezioni, tirata la QM, che ſega la tangente della cima N in A, ſarà altresì NA doppia di NE; perchè KG a GN, avendo la ragion compoſta di quella di KQ a QN, e della ragion doppia, ed eſſendo KM *Coroll. 5. di queſta* ad NE la ſteſſa di KG a GN, averà KM ad NE ragion compoſta

KM ad NA, (che è quella di KQ a QN) e di NA ad NE, dunque NA ad NE è in ragion dupla.

IX.

Per la qual coſa nelle dette ſezioni tirata QO parallela ad NA, che concorre colla tangente MG in O, ſarà la QO ad EA come QO ad NE, ma come QO ad EA così QM ad MA, ovvero QK a KN; e QO ad NE (per la ſimilitudine de' triangoli QGO, GNE) ſta come QG a GN, dunque come QK a KN così QG a GN.

X.

Nell' iperbole ſempre la tangente concorre col lato traſverſo di ſotto al centro, perchè eſſendo come QK a KN così QG, ad GN, e la prima eſſendo maggiore della ſeconda, ſarà la terza maggior della quarta, e però QG è più della metà del traſverſo QN, ſicchè il punto G ſempre cade tra il centro, e la cima dell' iperbole toccata.

XI.

Perchè il quadrato MK è uguale al rettangolo TKG, e queſto (nell' iperbole, e nell' elliſſe) ſta al rettangolo GKC come TK a KC, o come il lato retto FN al traſverſo NQ, ſarà dunque il quadrato MK al rettangolo GKC come il lato retto al traſverſo.

1. del 6. d' Eucl.

XII.

Ma ancora lo ſteſſo quadrato MK al rettangolo QKN (per la propoſizione 8. e 9.) ſta come il retto al traſverſo; biſogna dunque, che i rettangoli GKC, QKN, ſiano uguali.

XIII.

Sicchè nell' iperbole, eſſendo il rettangolo KCG la differenza, e nell' elliſſe la ſomma del rettangolo GKC, e del quadrato CK: ſiccome anco la differenza in quella, e la ſomma in queſta del rettangolo QKN, e dello ſteſſo quadrato CK è il quadrato CN; dovrà eſſere nell' una, e nell' altra il quadrato CN uguale al rettangolo KCG,

Eucl. lib. 2. p. 2. e prop. 3.

Eucl. lib. 2. prop. 6. e prop. 5.

Eucl. lib.6. pr.17. ed il ſemidiametro CN mezzano proporzionale fra la CK intercetta tra l'ordinata e'l centro, e la CG intercetta tra la tangente, e'l medeſimo centro.

XIV.

Quindi ſi danno più maniere da determinare la tangente a qualſivoglia punto della ſezione conica, prevalendoſi di qualunque delle proprietà ſopra dimoſtrate, o d'altre, che quindi dedurre ſi poſſono.

XV.

E viceverſa dato un punto G nel diametro prolungato fuori della ſezione (purchè nell' iperbole ſia ſotto il centro C) ſi tirerà da eſſo la tangente, ponendo (nella parabola) N K uguale ad N G, e nell'altre ſezioni facendo come C G a C N così CN a CK; o con altra equivalente coſtruzione trovando il punto K, e ordinata la KM, congiungaſi G M, che ſarà la tangente.

* * *

Pro-

Propoſizione XIII.

Fig.20

Nella parabola F H N, qualunque linea M Q parallela al diametro B N, è ancor eſſa un diametro, che taglia per mezzo tutte le linee F H, parallele alla tangente M G.

Concorra la F H col diametro principale BN in P, e tirata la tangente della cima N D ſi tirino le parallele a queſta HL, FB, ſeganti la MD, ne' punti C, Q, ſarà il triangolo FPB, al triangolo ſimile HPL, come il quadrato FB *prop. 4. di queſto* al quadrato HL, cioè come BN ad NL, o come il rettangolo DNB, al rettangolo DNL, e dividendo, il trapezio FHLB, al triangolo HPL, ſta come il rettangolo CLBQ, al rettangolo DNL; ma il triangolo HPL, al ſimil triangolo MGK, ſta come il quadrato HL al quadrato MK, o come la linea LN, ad

NK,

N K, cioè come il rettangolo D N L, al rettangolo D N K, dunque per l'ugualità ordinata, ſarà il trapezio F H L B al triangolo M G K come il rettangolo C L B al rettangolo D N K; ma i conſeguenti ſono uguali, perchè il triangolo M G K avendo la baſe K G, doppia della baſe N K, e la medeſima altezza M K col rettangolo D N K, è uguale ad eſſo rettangolo, dunque ancora ſaranno uguali gli antecedenti, cioè il trapezio F H L B uguaglia il rettangolo C L B Q, e tolto di comune il rettilineo E H L B Q, ſarà il triangolo F E Q, uguale al triangolo ſimile C E H, e però i loro lati omologhi F E, E H, ſaranno uguali; il che ſi dovea, ec.

Corollarj.

I.

Fig. 20 Siccome il triangolo M G K uguaglia il rettangolo D N K, così qualſivoglia altro ſimile triangolo H P L, ovvero F P B ſimilmente deſcritto ſopra l'ordinata H L ovvero F B, uguaglia il rettangolo, che gli corriſponde D N L, ovvero D N B; eſſendo tali rettangoli, paragonati al rettangolo D N K M, come le altezze L N, o B N riſpettivamente alla N K cioè in ragione de' quadrati dell'ordinate H L, F B, al quadrato M K, o come i triangoli ſimili H P L, F P B al triangolo M G K.

II. *Fig. 6*2

Quando l'ordinata F H ſeghi il diametro nel punto P dentro la parabola, con poca variazione ſi adatta lo ſteſſo diſcorſo, cioè argomentando non per diviſione, ma per compoſizione, o pure dicaſi in queſto modo. *Coroll. antec.* Il triangolo L P H uguaglia il rettangolo D N L C, aggiuntovi di comune C L B Q ſarà la figura C H P B Q eguale al rettangolo D N B Q, ma queſto pareggia il triangolo F P B, dunque la figura C H P B Q uguaglia il triangolo F P B, e tolto di comune Q E P B, reſta il triangolo C E H eguaguale al triangolo ſimile F E Q; onde il lato E H uguaglia E F, come ſopra.

Propoſizione XIV.

Fig. 21. e 22. **Nell' iperbole, e nell' elliſſe F H N, qualſivoglia retta tirata dal centro C, per un punto M della ſezione, è un diametro, che taglia per mezzo le linee F H, parallele alla tangente M G.**

Steſa F H, ſino al diametro principale in P, e tirata la tangente N D, ſiano a queſta parallele le linee H L, M K, F B, che concorrono colla retta C M la prima nel punto R, e l' ultima in S, ſarà il triangolo F P B al ſimile M G K come il quadrato F B al quadrato M K, o come il rettangolo Q B N al rettangolo Q K N, che per la 5. del 2. degli element. nell' elliſſe, e per la 6. del medeſimo nell' iperbole ſono le differenze de' quadrati C B, C

K dallo ſteſſo quadrato C N, e però ſaranno altresì come le differenze de' triangoli S C B, M C K dallo ſteſſo triangolo ſimile D C N, cioè come il trapezio S D N B al trapezio M D N K; ma il triangolo M G K uguaglia il trapezio M D N K (perchè eſſendo le linee K C, N C, G C, proporzionali, il triangolo M C K al triangolo ſimile DNC, ſta come K C alla terza C G, cioè come lo ſteſſo triangolo M K C ad M G C, e però D N C, M G C ſono uguali, ſicchè anche il rimanente trapezio D M K N uguaglia il reſiduo triangolo M G K) dunque ancora il triangolo F P B ſarà uguale al trapezio S D N B. Nella ſteſſa maniera ſi proverà, che il triangolo P H L uguaglia il trapezio D N L R (eſſendo i triangoli P H L, M G K, come i quadrati de' lati omologhi H L, M K, cioè come i rettangoli Q L N, Q K N, per cui differiſcono i quadrati C L, C K dallo ſteſſo quadrato C N, o come i trapezj D N L R, D N K M per cui i triangoli R C L, M C K differiſcono dal triangolo ſimile C D N) dun-

Eucl. lib 6. prop. 19 e prop. 1.

dunque il rimanente F H L B uguaglia il reſiduo S R L B, e tolto di comune il rettilineo H E S B L, ſaranno uguali i triangoli ſimili R E H, F E S, i quali per tanto averanno uguali i lati omologhi F E, E H, il che, ec.

Fig. 23. Ma ſe la retta tagliaſſe la curva in modo, che i punti P, H, non foſſero dalla medeſima parte dell' aſſe, ſi dimoſtrerà, come ſopra, il triangolo (nell' iperbole) F B P uguale al trapezio N D S B, ed il triangolo L H P pareggiare il trapezio N D R L; aggiunto di comune R L B S ſarà il rettilineo B P H R S uguale al trapezio N D S B, onde tolto S E P B di comune, rimane il triangolo R H E uguale al triangolo E F S come ſopra, ed eſſendo ſimili averanno uguali i lati omologhi F E, E H, il che, ec.

Fig. 24. Ma nella elliſſe tirata la tangente Q I nell' altro termine del lato traſverſo, con cui concorra M C in I, ſi proverà il triangolo F B P uguale al trapezio Q B S I, e aggiunto all' uno, e all' altro il triangolo

B S C, ſarà il rettilineo S C P F, uguale al triangolo Q C I uguale al triangolo C N D, da cui tolto il trapezio L N D R, e ſurrogando in ſua vece il triangolo uguale P H L, ſarà la figura C P H R eguale al detto triangolo C N D, ovvero all' altra figura S C P F, e tolto di comune C E P, reſta il triangolo S F E uguale al triangolo ſimile R E H, e però i lati omologhi F E, E H, ſono uguali come ſopra.

Corollarj.

I.

Fig. 21 22. e 23.

Quindi ſi ha, che i triangoli fatti ſopra l' ordinata, e che tagliano un lato comune col diametro principale, e gli altri lati paralleli ad una tangente, ſono uguali a' trapezi interpoſti a' due diametri, e colla altezza medeſima, che la diſtanza dell' ordinate dalla cima della ſezione, eſſendoſi provati i triangoli F P B, H P L uguali reſpettivamente a' trapezj N D S B, N D R L.

II.

Il triangolo C M G ſi è provato uguale al triangolo C N D, ed il triangolo M G K uguale al trapezio D N K M.

III.

Inoltre nell' elliſſe(*Fig.*24.)la figura S C P F, e nell' iperbole (*Fig.* 21. *e* 22.) ſiccome ancora nell' elliſſe la figura C P H R uguaglia ſempre il triangolo C N D intercetto da due diametri,e da una tangente,perchè quanto alla figura S C P F nell' elliſſe, (*Fig.* 22.) eſſendo il triangolo F P B uguale al trapezio S B N D, aggiunto B C S di comune, è chiaro eſſere la figura S C P F uguale al triangolo C D N; e quanto all' altra figura C R H P, tanto nell' iperbole, che nell' elliſſe; (*Fig.* 21. *e* 24.) eſſendo il triangolo P L H uguale al trapezio L N D R,tolti queſti dal triangolo R C L nell' iperbole, o pure aggiuntiſi nell' elliſſe, riſulta P H R C uguale al detto triangolo C N D, ſiccome anche a M C G.

* * *

Pro-

Propoſizione XV.

Nell' elliſſe, e nell' oppoſte ſezioni Q S M N qualſivoglia retta M C tirata dal punto M per lo centro, concorre dalla banda oppoſta della ſezione nel punto S, rimanendo diviſa pel mezzo dal centro, e le tangenti tirate da' ſuoi termini alla ſezione, cioè M G, S P ſaranno tra di loro parallele.

Fig. 25. *e* 26.

Ordinata la linea M K pongaſi C F uguale a C K e ſi ordini dalla banda oppoſta la retta F S, e congiungaſi S C,e perchè la differenza de' quadrati C N, C K, uguaglia la differenza de' quadrati C Q, C F, loro reſpettivamente uguali, ſarà il rettangolo Q K N uguale al rettangolo N F Q; ed eſſendo nella ſteſſa proporzione ciaſcuno di detti rettangoli verſo il quadrato dell' ordinata ſua corriſ-

Eucl. lib. 2. *prop.* 5.

pon-

pondente KM, FS (cioè nella ragione del traſverſo al retto) ſarà il quadrato MK uguale al quadrato FS, e però ne' triangoli MCK, SCF, i lati CK, CF, eſſendo uguali d'intorno gli angoli F, K, alterni delle parallele; ſarà ancora la baſe MC uguale a CS, e l'angolo FCS uguale all'angolo MCK, ed aggiunto di comune l'angolo MCF ſaranno uguali a due retti gli angoli FCS, FCM, ſiccome lo ſono gli angoli MCK, MCF, ſicchè la linea CS è per diritto alla linea MC, ed è la ſteſſa continuata, che concorre colla ſezione in S, rimanendo diviſa per mezzo nel centro C; e perchè condotte le tangenti MG, SP, tanto la ragione del rettangolo CKG al quadrato MK quanto la ragione del rettangolo CFP al quadrato FS, è quella del traſverſo al retto, eſſendo uguali i quadrati MK, FS, ſaranno uguali ancora i rettangoli CKG, CFP; ed eſſendo CK uguale a CF, ſarà KG uguale ad FP, e la CG uguale alla CP; ſicchè ne' triangoli CMG, CSP, eſſendo uguali i lati MC, CS, ed i lati CG, CP d'intorno gli angoli uguali nella cima C, ancora gli angoli CPS, CGM ſaranno uguali, e per eſſere alterni ſono le tangenti MG, SP, parallele; il che, ec.

Eucl. lib. 1. prop. 4.

Eucl. lib. 1. prop. 14.

Coroll. II della prop. 12. di queſto

Corollari.

I.

E' manifeſto, che le ſteſſe tangenti MG, SP ſono tra di loro uguali, per eſſer baſi de' triangoli ſimili, ed uguali MGC, PCS.

II.

Prolungata SF all'altra parte della ſezione in E ſarà FE uguale ad FS, cioè alla KM, a cui è parallela; e congiunta EM ſarà uguale, e parallela a KF, e però ſe per lo centro C ſi tirerà la retta CB parallela all'ordinate EF, taglierà queſta per mezzo in B le rette EM parallele al diametro QN, giacchè eſſendo FC uguale a CK la retta EB diventa uguale a BM.

Si chiami la H I quindi innanzi Diametro ſecondo coniugato al primo diametro Q N, perchè ſega per mezzo, ognuna di loro, le parallele all'altra, e la lunghezza di queſto ſecondo diametro H I nell'elliſſe viene determinata dal ſuo perimetro; ma nell'iperbole conviene determinarla in modo, che ſia media proporzionale fra il traſverſo, ed il retto, e che rimanga diviſa dal centro di maniera, che tanto nell'elliſſe, quanto nell'iperbole il quadrato H I ſia uguale al rettangolo Q N V compreſo dal traſverſo, e dal retto; giacchè ſi vede anche nell'elliſſe eſſere il rettangolo Q C N al quadrato H C come il traſverſo al retto, e quadruplicando i primi due termini, il quadrato Q N al quadrato H I ſtarà come il traſverſo al retto, cioè come lo ſteſſo quadrato Q N al rettangolo Q N V, il quale però ſarà uguale al detto quadrato H I.

* * *

Propoſizione XVI.

Nella parabola M H N i quadrati ancora dell'ordinate H E, N X, a qualunque diametro M X, ſono tra di loro come le parti M E, M X tagliate in detto diametro.

Figur. 27.

Imperocchè tirata la tangente M G, a cui ſono parallele le ordinate, ſarà il triangolo G M K uguale al parallelogrammo N K M D, o pure al parallelogrammo N X M G, che ha la baſe uguale, ſimilmente il triangolo P H L è uguale al parallelogrammo N L R D, come ſi è provato nella propoſizione 13. dunque la rimanente figura G M K L H P, è eguale al parallelogrammo R L K M, e tolto di comune H L K I ſarà M I P G uguale ad R H I M, e poſto di comune il triangolo M E I, ne viene il triangolo R H E uguale al parallelogrammo M E P G; dunque il trian-

36. *del* 1. *d' Euclid. e Coroll.* 4. *della* 12. *di queſto*

triangolo RHE al triangolo ſimile MGK, o pure al triangolo DNX, che è il medeſimo per aver tutti i lati uguali a' lati di eſſo, ſarà come il parallelogrammo MEPG, al parallelogrammo MXNG, cioè come la baſe ME alla MX, ma i detti triangoli ſimili ſono come i quadrati de' lati omologhi HE, NX, dunque i quadrati delle ſuddette ordinate ſono come le parti del diametro tagliate dal punto M; il che, ec.

Propoſizione XVII.

Figur. 28.

Ritrovare il lato retto corriſpondente a qualunque diametro MX della parabola.

Nell' aſſe della parabola NP ſi piglino ſotto, e ſopra della cima N le parti NF, NP, uguali alla quarta parte del lato retto appartenente al medeſimo aſſe, e ſi tiri PV parallela all' ordinata MK, che concorre col diametro XM prolungato in V; Dico, che il quadruplo della retta MV ſarà il lato retto appartenente al detto diametro MX. Imperocchè condotte le tangenti MG, ND, ſi congiunga DF; e per eſſere la GK dupla di GN, e la MK dupla di ND, ed il quadrato DN uguale alla quarta parte del quadrato MK, cioè ad un quarto del rettangolo compreſo dal lato retto, e dalla linea NK, ovvero GN; ſarà il quadrato ND uguale al rettangolo GNF, e però l'angolo GDF ſarà retto, ed il rettangolo FGN uguaglierà il quadrato DG, e quadruplicando i termini, il quadrato GM, ovvero dell' ordinata NX, uguaglierà il rettangolo di GN ovvero di MX nel quadruplo di GF, ovvero di MV (imperocchè KN uguagliando NG, ed NP uguagliando NF ſarà KP, ovvero MV, uguale a GF) dunque il quadruplo di MV ſarà il lato retto del diametro MX, imperocchè ancora il rettangolo del quadruplo di MV nella retta ME uguaglierà il quadrato dell' ordinata EH, eſſendoſi pro-

Coroll. 4. della 12. di queſto

provato nella precedente, che i quadrati XN, EH, ſono come le parti del diametro XM, EM, e però ancora, come i rettangoli di ciaſcuna di eſſe nel quadruplo della ſteſſa MV, ec.

Corollario.

Lo ſteſſo lato retto è anche quadruplo della retta MF, la quale per *8. del 6. d' Eucl.* eſſere uguale ad FG (eſſendo diviſa MG per mezzo in D, e la DF provatale perpendicolare) uguaglierà ancora la PK ovvero MV ſuddetta.

Chiamiſi quindi innanzi il punto F fuoco della parabola.

Propoſizione XVIII.

Figur. 29. Qualſivoglia raggio MX parallelo all' aſſe NK incontrandoſi nella curva parabolica MN, quindi ſi rifletterà per la direzione MF raccogliendoſi nel medeſimo punto del fuoco F.

Imperocchè c' inſegna la Catottrica, e ci moſtra la ſperienza, che talmente ſi riflettono i raggi, che l' angolo della rifleſſione rieſca ſempre uguale all' angolo dell' incidenza XMO; ma a queſto è uguale l' interno delle parallele MGK, a cui *Coroll. antec.* ſi uguaglia l' angolo FMG, per eſſerſi moſtrata MF uguale ad FG, dunque l' angolo dell' incidenza XMO appunto è uguale all' angolo FMG, e perciò ſarà queſto l' angolo della rifleſſione, ſicchè qualſivoglia raggio incidente XM riflettendoſi verrà a battere nel medeſimo punto F; il che, ec.

Corollarj.

I.

Perchè tutti queſti raggi paralleli all' aſſe ſi raccolgono in F, avendo ivi la ſua forza poſſono accender fuoco; donde è derivato il nome di queſto punto, che da altri ancora vien chiamato Umbilico.

II.

Viceverſa ſe nel fuoco F ſi porrà un lume, che i raggi concorrano nel concavo parabolico M N, ogni raggio incidente FM ſi rifletterà nella direzione M X parallela all' aſſe, onde il lume potrà diffonderſi a grandiſſima lontananza colla medeſima intenſione, perchè mantenendoſi i raggi paralleli non vengono a diſſiparſi in uno ſpazio maggiore; onde vengono a mantenere ſempre la ſteſſa forza.

III.

La ſomma di qualunque raggio incidente XM, e del rifleſſo M F ſempre uguaglia la ſteſſa linea T P ovvero l' aggregato della T N, e della N F, cioè l' aggregato di qualſivoglia altro incidente *x m*, e rifleſſo *m f*; imperocchè M X uguaglia T K, ed M F uguaglia F G, come ſi è detto, o pure uguaglia P K, dunque M X con M F uguaglia ſempre la ſteſſa T P.

IV.

Figur. 63.

Se da due punti M, Q preſi nel contorno della parabola, ſi congiungano al fuoco le rette M F, Q F, e ſi tirino le tangenti M L, Q L, ſarà ſempre l' angolo M F Q duplo dell' angolo M L Q, perchè concorrendo le tangenti coll' aſſe ne' punti G, H, eſſendoſi provata M F eguale a G F, ſaranno i due angoli M G F, F M G tra di loro eguali, e così per la ſteſſa ragione F H uguagliando F Q, l' angolo F H Q uguaglia l' angolo F Q H, e però l' angolo eſterno M F K è duplo dell' interno M G F, ovvero H G L, ſiccome l' angolo Q F K è duplo dell' angolo G H L, e però tutto l' angolo M F Q è duplo dell' angolo M L Q, il quale uguaglia i due angoli H G L, G H L.

32. del pr. d' Eucl.

V.

Che ſe i punti preſi nel contorno della ſezione foſſero in linea retta col fuoco, come ſono i punti E Q, allora le tangenti E T, Q T conterranno ſempre un angolo retto, perchè gli due angoli E F K, Q F

K, i quali preſi inſieme ſono dupli dell'angolo ETQ, compiſcono due angoli retti.

VI.

Che però la retta EQ tirata pel fuoco ſarà il lato retto appartenente al diametro TZ, che riguarda la detta EQ come ſua ordinata, dividendola per mezzo in R, perchè l'angolo retto ETQ, eſſendo in un mezzo cerchio deſcritto ſul diametro EQ, avremo il ſuo centro in R, e però RT, cioè la dupla di RS, ovvero di FB, ſarà eguale ad RE, e però EQ quadrupla della detta FB, ovvero di FS, che l'uguaglia, e di cui pure è quadruplo il lato retto del diametro TZ.

Coroll. prop. 17.

VII.

Congiunta TF, ſarà queſta perpendicolare ſopra EQ, eſſendo le tre linee TS, SF, SR eguali, e però il punto S centro del ſemicircolo, che paſſa per li punti T, F, R.

VIII.

Il luogo, in cui s'incontrano tutti gli angoli retti fatti dal concorſo delle due tangenti tirate dall'eſtremità d'una linea, che paſſa pel fuoco, è la retta TP perpendicolare all'aſſe dal punto P diſtante dalla cima N per l'intervallo NP eguale ad NF. Perchè eſſendoſi provata FS eguale ad ST, ed eſſendo per la propoſizione precedente l'inclinata FS eguale alla perpendicolare, che ſi tira dal punto S ſopra la retta VP, biſogna che la detta perpendicolare convenga colla retta ST, e però che il punto del concorſo delle tangenti T ſia nella detta retta VP.

IX.

Il rettangolo EFQ è la quarta parte del rettangolo contenuto dal lato retto del diametro SZ, cioè dalla ſteſſa EQ, e dal lato retto dell'aſſe. Perchè eſſendo TF perpendicolare ad EQ, tiratavi ſopra dall'angolo retto T, ſarà il rettangolo EFQ eguale al quadrato TF, ovvero tirata FY perpendicolare ad RT, ſarà eguale al rettangolo RTY compreſo da RT, che uguaglia

glia la metà di EQ, e da TY eguale ad FP, cioè alla metà del lato retto dell'aſſe.

X.

E quindi lo ſteſſo rettangolo EFQ uguaglierà il rettangolo di tutta la EQ nella FN quarta parte del lato retto dell'aſſe, onde ſarà QF ad FN come QE ad EF, o come QE ad EA, il perchè ſaranno in linea retta i punti Q,N,A.

2. del 6. d' Eucl.

Propoſizione XIX.

Figur. 30. e 31.

Nell' iperbole, e nell' elliſſe NM i quadrati dell'ordinate NX, HE, appartenenti a qualſivoglia diametro MS, ſono tra di loro come i rettangoli SXM, SEM, compreſi da' ſegmenti del diametro interpoſti fra l'uno, e l'altro termine di eſſo, ed il concorſo dell'ordinate.

Imperocchè ſi è di ſopra moſtrato

to eſſere il triangolo CDN uguale al triangolo CMG; dunque ancora il reſto XDN uguaglia il rimanente MXNG; ſimilmente il triangolo RHE uguaglia il trapezio MGPE, eſſendo queſti la differenza del triangolo CEP dal quadrilatero CPHR, ovvero dal triangolo CMG dimoſtrato già uguale al detto quadrilatero; ſicchè il triangolo DNX al triangolo ſimile EHR ſta come il trapezio MXNG al trapezio MEPG, cioè come la differenza de' triangoli XNC, MGC, alla differenza de' triangoli ECP, MGC, ma i primi due triangoli ſimili DNX, EHR, ſono come i quadrati dell'ordinate NX, HE, e la differenza de' ſuddetti triangoli XNC, MGC, ſta alla differenza de' triangoli ECP, MGC, come la differenza de' quadrati XC, MC, alla differenza de' quadrati EC, MC, cioè come il rettangolo SXM al rettangolo SEM, dunque i quadrati dell'ordinate ſono come i detti rettangoli; il che, ec.

nella prop. 14. di queſto

Coroll. 3. prop 14. di

Corollarj.

I.

Quindi ſarà facile il trovare i lati retti appartenenti a qualſivoglia diametro dell' iperbole, o dell' elliſſe, nel modo, che ſi trovarono al ſuo diametro principale, eſſendo che l' ordinate a queſti altri diametri hanno la ſteſſa relazione, che l' ordinate all' aſſe, ovvero al diametro principale.

II.

Similmente ſi troverà il diametro ſecondo conjugato a qualſivoglia diametro dell' elliſſe, o dell' iperbole, come ſi determinò già quello, che era conjugato al principale diametro.

Propoſizione XX.

Figur. 32. e 33. Nell' aſſe traſverſo dell' elliſſe, e dell' iperbole oppoſte determinando i rettangoli Q F N, N V Q, ciaſcuno uguale alla quarta parte del rettangolo, che ſi contiene dal traſverſo Q N, e dal retto N S, e congiungendo da' punti F, V a qualſivoglia punto della curva, le rette V M, F M, conterranno colla tangente M E angoli uguali. Chiamanſi i punti V, F, Fuochi di quelle ſezioni.

Si tenda l' ordinata M K verſo la regolatrice Q S in L, e congiunte da' termini dell' aſſe le rette N M, Q M, concorrano colle tangenti verticali N R, Q B, ne' punti R, B; ſi ſa per la 12. che la tangente M E divide per mezzo in E ed in O le rette Q B, N R, ed eſſendo il quadrato M K uguale al rettangolo N K L, ſarà L K, a K M, cioè S N, a N R, come K M, a K N, ovvero B Q, a Q N; ſicchè il rettangolo dell' eſtreme S N Q uguaglierà il rettangolo delle mez- *prop. 8. e 9. di queſto* zane R N, Q B, e dimezzando i lati di queſti rettangoli, ne verrà il rettangolo O N, Q E uguale alla quarta parte del rettangolo N R, Q B, o pure del rettangolo N S, N Q; cioè ſarà uguale il rettangolo O N, Q E, al rettangolo N F Q, o pure Q V N, ſicchè dintorno agli angoli retti, N, Q, ſaranno proporzionali O N, N F a F Q, Q E, e congiungendo F O, F E, la ſimilitudine de' triangoli F Q E, O N F, ci darà l'angolo N O F uguale all'angolo Q F E; ma quello coll'angolo O F N compiſce un retto, dunque ancora queſto ſarà il medeſimo; onde l'angolo E F O ſarà retto; nella ſteſſa maniera congiungendo O V, E V ſi proverà eſſere retto l'angolo O V E, e però il cerchio deſcritto ſopra il diametro E O, paſſerà per gli punti F, V, ed altresì (poſto che convengano le rette V O, E F, nel punto H) i cerchj deſcritti ſopra i diametri O H, E H, paſſeranno quello per F, queſto per V, e non eſſendo i loro diametri poſti per diritto, neceſſariamente ſi ſegheranno

nel punto del contatto M (perchè ſe in un altro diverſo punto concorreſſero, congiunta dal punto H al concorſo di eſſi cerchj una linea retta, queſta conterebbe colle rette dal detto concorſo tirate a' punti O, E due angoli retti, ſicchè le due rette congiunte da' punti O, E al detto concorſo ſarebbero una linea ſola, la quale con la retta O M E conterrebbe qualche ſpazio) ſaranno dunque nella ſteſſa porzione gli angoli O M F, O H F, e ſimilmente gli angoli E M V, E H V, che però eſſendo uguali gli angoli O H F, E H V, anche li due angoli O M F, E M V, contenuti dalle rette inclinate da' fuochi F, V allo ſteſſo punto M della curva, e dalla tangente M E ſono tra di loro uguali; il che, ec.

Corollario.

I.

Quindi è chiaro, che i raggi procedenti da uno de' fuochi F dell' elliſſe, vengono rifleſſi dalla curva ellittica nell' altra fuoco V per eſſere gli angoli V M E, F M O, uguali, e nell' iperbole i raggi, che procedono dal fuoco inferiore F ſi riflettono dalla curva M N in maniera tale, che tutti per diritto riguardino il fuoco eſteriore V: vicendevolmente dal fuoco eſteriore V, talmente ſi riflettono dal conveſſo della curva M N, che per diritto riguardano l' altro fuoco interiore F.

Propoſizione XXI.

Figur. 34. e 35.

Poſte le ſteſſe coſe, tirando per lo centro la retta C I parallela a qualſivoglia linea F M inclinata dal fuoco F alla ſezione, la qual retta C I s' incontri colla tangente M O nel punto I, ſarà C I uguale alla metá del traſverſo C N.

Imperocchè tirando V D parallela alla ſteſſa F M, ſarà l' angolo O M F, o pure I M V uguale all' angolo V D I, e però la retta V D ſarà uguale ad V M; ma anche la retta D I uguaglia I M, ſiccome V C uguaglia C F, ed V T uguaglia T M, dunque ne' triangoli D V I, V M I, il lato V I è comune, e gli altri lati ſono uguali, ſicchè gli angoli D I V, M I V, ſaranno retti, ed il cerchio deſcritto ſul diametro V E paſſerà per ambi i punti I, Q (dove altresì ſi è dimoſtrato retto l' angolo V Q E) e congiungendo le rette I Q, I N, l' angolo Q E V ſarà uguale all' angolo Q I V nello ſteſſo ſegmento; ſimilmente il cerchio deſcritto intorno al diametro O V paſſerà per gli punti I, N, e l' angolo N I O ſi proverà uguale all' angolo O V N; ma ſi è moſtrato nell' antecedente l' angolo Q E V uguale all' angolo O V N, dunque Q I V, N I O parimente ſono eguali, ed aggiunto di comune l' angolo V I N nell' elliſſe, o pure detratti ambedue dallo ſteſſo angolo V I N nell' iperbole

prop. antec.

Eucl. p. 2. l. 6.

Eucl. p. 21. libr. 3.

ſi farà l' angolo QIN uguale all' angolo retto VIO, e però il cerchio deſcritto col diametro QN paſſerà per lo punto I, e la retta CI condotta dal punto di mezzo del diametro QN alla circonferenza, ſarà uguale al ſemidiametro traſverſo; il che, ec.

Corollarj.

I.

Quindi ſi cava eſſere nell' elliſſe l' aggregato dell' inclinate da' fuochi ad uno ſteſſo punto della ſezione, eguali all' aſſe traſverſo; imperocchè eſſendo la retta VD, ovvero VM dupla della TI, e la FM dupla della CT (per eſſere FV diviſa per mezzo in C) ſarà la ſomma d' ambedue le rette VM, FM dupla di tutta la CI, di cui parimente è duplo il traſverſo NQ, e però eſſendo ſempre FM, MV, in qualunque ſito uguali alla ſteſſa lunghezza NQ, ſe i due terminj d' un filo lungo quanto NQ ſi fiſſeranno ne' punti F, V, ed interpoſto uno ſtile al filo, verſo N, ſi condurrà in giro tenendo ſempre teſe ambe le parti del filo, verrà deſcritta l' elliſſe.

Eucl. p. 2. del l. 3.

II.

Ma nell' iperbole la differenza delle due FM, VM inclinate da' fuochi, uguaglierà l' aſſe traſverſo, perchè eſſendo DV, ovvero VM dupla della TI, ſiccome la MF è dupla della TC per eſſere FV diviſa per mezzo in C, anche la differenza delle due VM, MF ſarà dupla della differenza delle due TI, TC, cioè dupla della CI, di cui parimente è duplo il traſverſo QN; onde ſe per la cruna d' un ago paſſeranno due fili diſuguali, uno più lungo VM fiſſo in V l' altro più corto FM fiſſo in F, la differenza de' quali uguagli la retta QN; movendo in giro l' ago, ſicchè rimangano teſi ambi li fili, e vengano quindi poſcia accompagnati, laſciando ſcorrere dalla cruna uguale lunghezza di eſſi, acciocchè ſi mantenga ſempre la ſteſſa differenza d' ambidue, verrà deſcritta l' iperbole.

2. del 6. d' Eucl.

Propoſizione XXII.

Figur. 36.37. e 38.

In ogni ſezione conica dal fuoco F ordinata la FM all' aſſe NB, e tirate le tangenti MG, NO, che convengano in O, ſarà la MF uguale alla metà del lato retto NV, e la NO uguale alla retta NF.

Figur. 36.

Eſſendo nella parabola, uguale FN ad un $\frac{1}{4}$ del lato retto, ſarà il rettangolo FNV, cioè il quadrato FM uguale ad un $\frac{1}{4}$ del quadrato NV, ma anche il quadrato della metà di VN è $\frac{1}{4}$ del quadrato di tutta, dunque MF uguaglia la metà di NV, ed è dupla della FN, ma è dupla ancora della NO per eſſere FG dupla di GN, dunque ancora NO è uguale ad NF.

prop. 7. di queſto

Coroll. 4. prop 12. di queſto

Figur. 37. e 38.

Nell' altre ſezioni poi il rettangolo QFN al quadrato MF ſta come

il traverſo QN al retto NV, ovvero come il rettangolo QNV al quadrato NV, e permutando il rettangolo QFN al QNV ſta come il quadrato di MF al quadrato di NV; ma il primo è la quarta parte del ſecondo, dunque il terzo è la quarta parte del quarto, e però MF uguaglia la metà di NV. Per eſſer poi il rettangolo QFN uguale ad un $\frac{1}{4}$ del rettangolo QNV, ſarà uguale al rettangolo, che ſi contiene dalla metà del traſverſo QN nella metà del retto NV, cioè MF, ed al rettangolo QFN eſſendo uguale il rettangolo CFG, ſarà il rettangolo CFG uguale al rettangolo della CN in MF, e però CF, ad NC ſta come MF, ad FG ma CF, a CN ſta come CN, a CG, e dividendo, e permutando FN, a NG ſta come NC, a CG, ovvero ſta come CF, a CN, dunque FN, a NG ſta come MF, a FG, ovvero ſta come ON, a NG, e però NF ſarà uguale ad NO; il che, ec.

Coroll. 1. p. 8. e Coroll. 12. prop. 9. di queſto

prop. 20. di queſto

Coroll. 12. p. 12. di queſto

Coroll. 12. prop. 13. di queſto

Co-

Corollario.

I.

E manifeſto che il triangolo rettangolo GFM nella parabola ha il lato GF uguale ad FM per eſſere l'uno, e l'altro duplo di NF; ma nell' iperbole, e nell' elliſſe eſſendo GF, ad FM come GN, a NO, o pure ad NF, cioè pel corollario 9. della propoſizione 12. come GQ ad QF; onde nell' iperbole eſſendo, GQ minore di QF, e nell' elliſſe eſſendo quella maggiore di queſta, ſarà ancora il lato GF nell' iperbole minore di FM, e nell' elliſſe maggiore.

Propoſizione XXIII.

Figur. 36 37. e 38. Poſte le ſteſſe coſe, ed ordinata la retta BH, che concorre colla tangente GM in A, e congiunta la FH, dico eſſere FH eguale alla BA.

Tirata HP parallela alla tangente GM, che ſarà per mezzo diviſa in I dal diametro CM, ſarà per gli corollari della propoſizione 13. e 14. il triangolo BHP uguale ad NDRB, ovvero GMRB (eſſendo GNO uguale a DOM) e tolto di comune PIRB reſta GPIM uguale IRH, ed aggiunto IMAH rimane PHAG (cioè la differenza de' triangoli ſimili GAB, PHB) uguale MRA; dunque la differenza de' triangoli GAB, PHB ſta al triangolo PHB come il triangolo RMA al triangolo PHB, ma la prima uguaglia quella, che ha la differenza de' quadrati AB, BH, cioè il rettangolo TAH al quadrato HB; dunque TAH al quadrato HB ſta come il triangolo MRA al triangolo PHB, e permutando il rettangolo TAH al triangolo MRA ſta come il quadrato HB al triangolo PHB ovvero come il quadrato NO al triangolo NOG, o come il quadrato NF al triangolo OMD; e di nuovo permutando, il rettangolo TAH al quadrato NF ſta come il triangolo MRA al triangolo OMD, cioè come il quadrato AM al quadrato MO, o pure come il quadrato FB allo ſteſſo quadrato NF; dunque il rettangolo TAH uguaglia il quadrato BF, e poſto di comunne il quadrato BH ſarà il quadrato BA uguale al quadrato FH, e la retta BA intercetta fra l'aſſe, e la tangente GM uguaglia la FH inclinata dal fuoco della ſezione; il che, ec.

Corollarj.

I.

Si noti, che il rettangolo TAH uguaglia il quadrato di FB, come ſi è provato di ſopra.

II.

Si ha di quì un modo facile per deſcrivere qualſivoglia ſezione conica per via di punti innumerabili facendo il triangolo rettangolo GFM, in cui il lato GF ſia uguale ad FM per la parabola, minore di eſſo

per l'iperbole, e maggiore per l'elliſſe, ed ordinate in detto triangolo infinite rette BA parallele ad FM, poi dal punto F applicando ſopra le medeſime BA le rette FH uguali alle corriſpondenti BA; perchè il punto del concorſo H ſarà nella curva della ſezione propoſta a deſcriverſi.

III.

Figur. 39.

Quindi ſi raccoglie, che in ogni ſezione conica NMH, ſe dal punto G, ove la tangente, che appartiene all'ordinata dal fuoco, concorre coll'aſſe, ſi tirerà la GQ parallela all'ordinata, ſopra a cui da qualſivoglia punto H ſi tiri la perpendicolare HV, e da qualſivogliano punti I, H della ſezione ſi tirino le perpendicolari IT, HV; congiunte al fuoco le rette HF, IF, ſarà ſempre FH ad VH come FI ad IT, cioè nella ſteſſa ragione di FN ad NG. Imperocchè AB uguaglia FH, ed HV è ugule a BG, ma AB alla BG è ſempre come NO, cioè NF ad NG, *22. di queſto* dunque altresì FH ad HV ſta come FN, FN ad NG, e lo ſteſſo ſi prova della FI (eguale ad *ab*) verſo IT.

IV.

Anzi tirata dal fuoco qualunque retta FS, che ſeghi la curva in I, e da qualunque punto H condotta HQ parallela ad FS, ſarà ſempre FH ad HQ come FI ad IS; perchè tirate le perpendicolari HV, IT, ſarà FH ad HV come FI a IT; ma per la ſimiglianza de' triangoli HV ad HQ ſta come IT ad IS, dunque per l'ugualità FH ad HQ ſta come FI ad IS.

Coroll. antec.

Propoſizione XXIV.

Figur. 40.

Se nella tangente d'un iperbole ſi piglieranno dall'una, e dall'altra parte dalla cima di eſſa N le porzioni NA, NR tali, che il quadrato di ciaſcuna di eſſe uguagli la quarta parte del rettangolo ſotto il traſverſo

QN, ed il retto NS, congiunte al centro le rette CA, CR, non potranno giammai concorrere coll'iperbole, ſebbene ad eſſa s'anderanno ſempre accoſtando in infinito, di maniera tale che la diſtanza di eſſe rette dalla curva diventerà minore di qualſivoglia dato ſpazio. Chiamanſi queſte rette Aſintoti dell'iperbole.

Tirato il diametro CNK, ſi ordini MK parallela alla data tangente, che concorra colle rette CA, CR ne' punti D, Z. Poichè il quadrato CN è la quarta parte del quadrato QN, ed il quadrato NA è la quarta parte del rettangolo QNS, ſarà il quadrato CN al quadrato NA, ovvero il quadrato CK al quadrato KD, come il quadrato QN al rettangolo QNS, ovvero ſta come

Eucl. lib 2. prop 6. e 5 e lib 5 prop. 19.

il traſverſo Q N al retto N S; cioè come il rettangolo Q K N levato dal quadrato C K al quadrato K M tolto dal quadrato K D, onde ancora il rimanente quadrato C N al reſiduo rettangolo D M Z ſarà nella ſteſſa ragione del quadrato C N al quadrato N A; dunque il rettangolo D M Z ſempre uguaglia il quadrato A N, ovvero il rettangolo A N R, e perciò la retta C A non potrà mai concorrere colla curva N M, dovendoſi tra l' una, e l' altra ſempre interporre qualche porzione D M, la quale col reſiduo M Z contenga il rettangolo D M Z uguale al rettangolo A N R; e perchè reciprocamente ſarà ſempre M Z ad N R come A N a D M, potendo creſcere in infinito la ragione della retta K Z (la quale tirandoſi in maggior lontananza dal punto C diventa maggiore di qualſivoglia retta aſſegnabile) e molto più di tutta la M Z verſo la ſteſsa N R, dovrà ancora creſcere in infinito la ragione di N A verſo la D M, onde diventerà minore di qualunqne grandezza propoſta; il che, ec.

Corollarj.

I.

E' manifeſto, che le ſteſse rette A C, R C, continovate ſopra il centro, tagliano dalla tangente dell' iperbole le porzioni Q E, Q X eguali all' altre N A, N R, mercè la ſimilitudine de' triangoli C N A, C Q E ſopra gli uguali lati N C, C Q; onde queſte ſteſse rette A C E, R C X ſono aſintoti all' altra iperbole oppoſta, avendo in riguardo ad eſſa la medeſima proprietà.

II.

Qualunque B H parallela ad un aſintoto C A dentro l' angolo A C R, concorre coll' iperbole, e prolungata la ſega, perchè la diſtanza della curva dall' aſintoto diventa finalmente minore di qualunque intervallo A H interpoſto fra le due parallele A C, B H.

III.

Molto più poi qualunque retta

CB, che divida l'angolo ACR, ſegherà infallantemente l'iperbole, mentre la ſua diſtanza dall'aſintoto ſi fa minore di qualunque intervallo; ma la diſtanza CB, CA ſi dilata a qualunque larghezza.

IV.

Le porzioni DM, VZ, intercette fra gli aſintoti, e la curva dall'una, e dall'altra banda, ſono uguali, perchè ſiccome AN è uguale ad NR, così DK uguaglia KZ, e già l'ordinata MK uguaglia KV; dunque i reſidui DM, VZ ſono uguali tra loro.

Propoſizione XXV.

Figur. 41. Se qualſivoglia retta TD toccherà l'iperbole in un punto V concorrendo cogli anſitoti ne' punti T, D, riuſcirà TV uguale a VD, ed il quadrato di ciaſcuna di eſſe uguaglia la quarta parte del rettangolo compreſo dal traſverſo diametro ICV, che paſſa per lo contatto, e dal retto VF a eſſo corriſpondente; ed il rettangolo PLS fatto dalle parti d'una retta PS parallela alla tangente TD diviſa dall'iperbole, e dagli aſintoti, uguaglierà lo ſteſſo quadrato TV.

Imperocchè ſe ciò non foſse, preſe le parti VB, VG, i di cui quadrati uguagliaſsero la quarta parte del rettangolo IVF, ne ſeguirebbe, che congiunte le rette CG, CB, per l'antecedente, ſarebbero aſintoti, dunque o cadeſsero dentro, o fuori de' propoſti aſintoti CT, CD, potrebbe l'angolo contenuto dagli aſintoti dividerſi da una retta non concorrente coll'iperbole, il che è aſsurdo, per lo corollario terzo della precedente; biſogna dunque, che le ſteſse VT, VD ſiano tali, che il quadrato loro uguagli la quarta parte del rettangolo IVF, e però che ſiano uguali, e che il rettangolo PLS uguagli lo ſteſso quadrato TV, come ſi è moſtrato nella precedente; il che, ec.

Corollarj.

I.

Quindi è manifeſto non poterſi aſsegnare altri aſintoti all' iperbole, che le due rette CT, CD, e qualunque altre rette, che vengano dal centro C come CG, CB, o ſi ſcoſtano ſempre più dall' iperbole, o preſto la ſegano.

II.

Le parti di qualſivoglia linea PS ſotteſa all' angolo dell' aſintoto, interpoſte fra la curva, e gli aſintoti come PL, OS, vengono ſempre eguali, eſsendo PS parallela a qualche tangente TD dell' iperbole, e conſeguentemente ordinata ad un diametro ICV, onde come nel corollario 4. dell' antecedente, riuſcire debbono PL, OS uguali.

Propoſizione XXVI.

Se qualunque linea QO ſega le iperbole oppoſte, concorrendo cogli aſintoti ne' punti E, Z, tirando per lo centro il diametro ICV parallelo alla detta QO, ſarà il rettangolo EOZ uguale al quadrato CV. Figur. 42.

Tirata la tangente TVD, e dal punto O tirata la parallela SOP, la ragione del rettangolo SOP al rettangolo EOZ ſi comporrà della ragione de' lati EO, OP (cioè CV a VD) e ZO a OS (o pure CV a VD) onde il rettangolo EOZ al rettangolo POS ha doppia proporzione di CV a VD, cioè ſta come il quadrato CV al quadrato DV; ed eſſendo per l' antecedente il rettangolo SOP uguale al quadrato DV, ſarà dunque il rettangolo E O Z uguale al quadrato C V il che, ec.

Corollarj.

I.

Similmente ſi moſtrerebbe il rettangolo Z Q E eguale al quadrato C I, che è il medeſimo di C V, e però i rettangoli E O Z, Z Q E, ſono eguali, ſicchè O E a E Q ſta come Q Z a Z O, e componendo O Q a Q E ſta come Q O a O Z, e però ancora le rette Q E, O Z, intercette fra gli aſintoti, e le iperbole oppoſte, ſono uguali.

II.

Anche il rettangolo Q E O, o pure Q Z O uguaglia lo ſteſso quadrato C V, perchè, eſsendo Q E eguale a O Z, ſarà Q Z uguale ad E O, ed il rettangolo Q Z O ſarà il medeſimo di E O Z.

* * *

Propoſizione XXVII.

Figur. 43.

Se nell' iſteſſa, o nell' oppoſte ſezioni ſi piglieranno due punti O, V, e da ciaſcuno ſiano tirate due linee ſopra agli aſintoti di maniera che le terminate ad uno come O P, V T ſiano tra di loro parallele, e ſimilmente le terminate all' altro aſintoto O S, V D ſiano altresì parallele, ſarà il rettangolo S O P uguale al rettangolo D V T.

Si congiunga la retta O V, la quale concorrendo con gli aſintoti in L, I ſarà gli due ſegmenti O I, V L uguali, ſarà dunque O L a V L come V I a I O, ma per eſsere parallele O P, V T ſono tra di loro come O L a V L, ed eſsendo altresì parallele V D, O S, queſte altresì ſono come VI ad IO, dunque OP a VT ſta come VD a OS, pertanto il rettangolo dell'eſtreme POS uguaglia quello delle mezzane DVT; il che, ec.

Corollarj.

I.

Figur. 44. Se le rette VD, VT, OS, OP ſaranno parallele agli ſteſſi aſintoti, riuſciranno uguali i parallelogrammi TVDC, POSC inſcritti nello ſpazio aſintotale. Imperocchè avendo gli angoli O, V uguali allo ſteſſo angolo C contenuto dagli aſintoti, averanno tra di loro la ragione compoſta de' lati; ſiccome l'averebbero i rettangoli TVD, POS, e però eſſendo queſti rettangoli uguali, anche i detti parallelogrammi inſcritti nello ſpazio aſintotico ſempre riuſciranno uguali fra loro

II.

E perciò le parallele ad un aſintoto, cioè OS, VD ſaranno ſempre

reciproche delle diſtanze dal centro DC, SC, come dee ſuccedere ne' parallelogrammi equiangoli, ed eguali di ſpazio.

III.

Di più anche i triangoli COS, CVD inſcritti nello ſpazio aſintotico ſono uguali per eſſere la metà de' ſuddetti parallelogrammi.

IV.

Anzi tirate le tangenti HVG, ROM, terminate agli aſintoti, ſaranno i triangoli HCG, RCM tra di loro uguali, come quegli, che ſono quadrupli de' triangoli CVD, COS già provati uguali, mercè, che *prop. 25. di queſto* le dette tangenti HG, RM reſtano diviſe per mezzo ne' contatti V, O.

Propoſizione XXVIII.

Siano le diſtanze dal centro *Figur. 57.* preſe CL, CO, CA continuamente proporzionali, e ſi tirino LP, OK, AI parallele all'altro aſintoto CR fino all'iperbole PKI: dico, co, che gli ſpazj iperbolici LPKO, OKIA ſono uguali.

Coroll 2. dell' antec. Eucl def. 1. del 6.

Eſſendo CA a CO come CO a CL, o come LP, cioè AT ad OK, ſaranno ſimili i parallelogrammi CATR, COKS; e però dintorno allo ſteſſo diametro CT; ſimilmente perchè OK ad AT, ovvero ad LE ſta come AC ad OC, o come OC a CL, ſarà il parallelogrammo COKS ſimile all' altro CLEM, e però dintorno lo ſteſſo diametro CT, e perchè i diametri ET, PI, ſi ſegano vicendevolmente nel mezzo in X, ſarà PI l' ordinata dell' iperbole PKI ſopra il diametro CKX, e la ſua cima ſarà nel punto K; onde dagli uguali triangoli CXI, CXP levate le mezze iperbole uguali PKX, IKX, ſaranno uguali i reſidui PCK, ICK, ed eſſendo il triangolo CLP uguale a CKO, tolto loro di comune CEL, ed aggiuntovi PEK, ſarà PCK eguale allo ſpazio PLOK, ſiccome dagli uguali triangoli

COK, CAI toltone COF, ed aggiuntovi KFI, rieſce ICK eguale ad OKIA, adunque gli ſpazj iperbolici LPKO, OKIA, ſono eguali; il che ec.

Eucl. l. 6. p. 26.

Coroll. 3. dell' antec.

Corollarj.

I.

Figur. 58.

Se ſaranno nella ſteſſa ragione CA a CO, come CD a CL, ordinate le rette AI, OK, DQ, LP, ſaranno eguali gli ſpazj iperbolici AOKI, DQPL, perchè poſta CN media fra le due OC, DC, ſarà altresì media queſta fra l' eſtreme AC, LC, per eſſere il quadrato NC eguale al rettangolo DCO, che pareggia l' altro LCA; dunque ſarà eguale lo ſpazio ANVI allo ſpazio NLPV, ſiccome ancora ONVK ad NDQV; dunque i reſidui AOKI, DLPQ ſaranno eguali.

II.

Se foſſero in continua proporziozione le rette CA, CO, CN, CD, CL, ec. tutti gli ſpazj intercetti tra le corriſpondenti ordinate ſarebbero eguali, onde volendo dividere per mezzo uno di queſti ſpazj, come ſarebbe AILP, baſta prendere CN media fra le eſtreme AC, CL, ed ordinare NV: volendolo dividere in tre parti, biſognerebbe frapporre all' eſtreme, due medie proporzionali, e così di mano in mano, ſiccome volendolo multiplicare quanto ſi voglia, baſterebbe continuare la ſteſſa proporzione delle diſtanze dal centro, perchè ſempre tanto è moltiplice uno ſpazio d'un altro, quanto è multiplicata la ragione delle diſtanze, che hanno dal centro l'eſtreme ordinate di quello, della ragione, che hanno le diſtanze di queſto.

III.

Onde propoſti due ſpazj ONVK, DQPL, ſono ſempre nella ſteſſa proporzione, in cui è la ragione delle OC, CN alla ragione delle CD, CL (ovvero come la ragione delle ordinate NV, OK a

Coroll. 2. *prop.* 27.

quella dell' ordinate LP, DQ) perchè moltiplicando qualunque di queſte ragioni ſi multiplica egualmente lo ſpazio corriſpondente, e ſecondochè il multiplice d'una ragione è maggiore, minore, o eguale al moltiplice dell' altra, anche il multiplice dello ſpazio è maggiore, o minore, o eguale al multiplice dell' altro.

IV.

Ciò, che ſi è detto degli ſpazj AOKI, ONVK, ec. vale ancora de' ſettori iperbolici ICK, KCV, ec. che ſi ſono dimoſtrati eguali a' detti ſpazj.

V.

Lo ſpazio interpoſto tra l'iperbole, e gli aſintoti è di grandezza aſſolutamente infinita, potendoſi aſſegnare in eſſo uno ſpazio quanto ſi voglia multiplice d'un altro aſſegnato.

* * *

Propoſizione XXIX.

Figur. 45. Poſte fra gli angoli conſeguenti ACT, TCE due iperbole NV, HG, cui ſieno aſintoti i lati dei detti angoli, tutte le linee NH, VG parallele all'aſintoto AE, reſtano dall'altro aſintoto diviſe proporzionalmente ne' punti R, T, e le tangenti tirate da' punti N, H convengono in uno ſteſſo punto T dell'aſintoto, e vicendevolmente da uno ſteſſo punto T dell'aſintoto tirate le tangenti ad ambe le iperbole TH, TN, la retta NH, che congiunge i contatti, è parallela all'altro aſintoto AE.

Coroll. 2. prop. 27. Perchè RN ad VT ſta come TC a CR, nella qual proporzione è altresì RH a TG; dunque permutando NR ad RH ſta come VT a TG. E perchè le tangenti ET, AT ſono diviſe per mezzo ne' contatti H, N, è manifeſto che NH è parallela ad AE, e che altresì CT è diviſa per mezzo in R; onde nello ſteſſo punto T convengono le dette tangenti dell'aſintototo, e che la retta, la quale congiunge i contatti delle tangenti tirate da uno ſteſſo punto dell'aſintoto, è parallela all'altro; il che ec. *25. di queſta*

Propoſizione XXX.

Figur. 46. Se col ſecondo diametro HI conjugato al primo NQ ſi deſcriveranno altre due iperbole oppoſte HK, IF, nelle quali vicendevolmente il ſecondo diametro conjugato al primo HI ſia lo ſteſſo NQ; ſaranno comuni a queſte quattro iperbole gli aſintoti AC, TC, e tali ſezioni

ni ſpecialmente dirannoſi Iperbole Conjugate.

Tirate le tangenti N T, I T, che ſono parallele all' ordinate de' diametri N Q, I H, alle quali vicendevolmente ſono altresì paralleli i detti diametri conjugati I H, Q N, ſarà N C I T un parallelogrammo, ma eſſendo H I media proporzionale fra il traſverſo Q N, ed il retto corriſpondente, è il quadrato C I uguale alla quarta parte del ſuddetto rettangolo, dunque C T è aſintoto delle iperbole N V, Q G; ſimilmente eſsendo N Q diametro ſecondo conjugato al primo H I delle iperbole I F, H K, ſarà il quadrato C N, ovvero I T uguale alla quarta parte del rettangolo contenuto ſotto il traſverſo H I, ed il retto ſuo corriſpondente in dette iperbole; dunque C T è altresì aſintoto alle ſezioni I F, H K, e però ſono gli aſintoti comuni a tutte e quattro l' iperbole conjugate; il che ec.

Coroll. 3. prop. 15. di queſto

Corollarj.

I.

E' manifeſto, che N I è ſegata per mezzo in R dall' aſintoto C T, per eſſere tanto queſta, che quella diametri del parallelogrammo C N T I.

II.

E perchè la medeſima N I (per la propoſizione antecedente) è parallela ad A E, ancora qualunque altra parallela al detto aſintoto A E, ovvero, che congiunga i contatti delle tangenti tirate da un medeſimo punto dell' altro aſintoto C T, ſarà dallo ſteſſo aſintoto diviſa per mezzo.

III.

Vicendevolmente ſe da qualunque punto T, preſo in un aſintoto delle iperbole conjugate, ſi tireranno le tangenti alle iperbole, che ſono negli angoli conſeguenti come T N A, T I E, i diametri tirati per gli contatti NCQ, ICH ſaranno conjugati; perchè ſiccome NI ſi dividerà per mezzo in R (ſecondo il corollario precedente) così AE ſarà per mezzo diviſa in C, e ſono diviſe per mezzo ancora in N, e in I le tangenti TA, TE, dunque CI è parallela ad NT, e CN ad IT; ſicchè CITN è un parallelogrammo, onde il quadrato CI uguagliando il quadrato NT, ſarà uguale alla quarta parte del rettangolo contenuto dal traſverſo QN, e dal ſuo retto; e però il quadrato HI uguaglia il detto rettangolo intero, ed è la medeſima HI parallela alla tangente NT, ed all'ordinate del diametro QN; dunque HI è il ſecondo diametro conjugato al primo QN.

IV.

Tirandoſi altre tangenti VP, FP dall'eſtremità di due altri diametri conjugati convengono nell'iſteſſo punto dell'aſintoto in P, ſicchè gli aſintoti paſſano per tutti gli angoli de' parallelogrammi fatti dalle tangenti di due qualſivogliano diametri conjugati.

Propoſizione XXXI.

Figur. 47.

Nelle elliſſe, e nelle iperbole conjugate il parallelogrammo XOYR contenuto dalle tangenti tirate dagli eſtremi di due qualſivogliano diametri conjugati GF, HI, è ſempre uguale al rettangolo LKZT, contenuto dagli aſsj ED, AB.

Coroll. 9. p. 12. di queſto

Si congiunga DH, e ſi ordini dal punto D ſopra il diametro GF la retta QDN; è manifeſto eſſere PC a CF cioè il parallelogrammo PCVE ed al parallelogrammo egualmente alto CHOF come FC a CN, cioè come lo ſteſſo CHOF al parallelogrammo CHQN, e ſimilmente VC a CA, cioè il primo parallelogrammo PCVE all'egualmente alto CATD ſta come CA a CM,

cioè

cioè come lo ſteſſo CATD al rettangolo CMSD, ovvero al medeſimo parallelogrammo ſoprannominato CHQN, a cui è eguale per eſſere l'uno, e l'altro duplo del triangolo inſcritto CHD; per tanto il parallelogrammo CHOF, ed il rettangolo CATD ſono uguali, eſſendo l'uno, e l'altro proporzionale di mezzo fra lo ſteſſo parallelogrammo PCVE, e l'altro CHQN, dunque ancora il parallelogrammo XOYR quadruplo dall' altro CHOF ſarà eguale al rettangolo LKZT, che altresì è quadruplo del rettangolo CATD; il che ec.

Corollario.

I.

Se ſi connettono i termini de' diametri conjugati, ovvero degli aſſi, ne naſceranno i parallelogrammi GIFH, AEBD tra di loro altresì eguali, eſſendo ciaſcuno di eſſi, la metà de' parallelogrammi contenuti dalle tangenti conſiderati nella preſente propoſizione.

Propoſizione XXXII.

Figur. 59. e 60.

Nell' iperbole la ſomma degli angoli MFQ, MVQ contenuti dalle inclinate da ambi i fuochi F, V a due punti M, Q preſi nella ſezione; e nell'elliſſe la differenza di detti angoli è ſempre dupla dell'angolo MLQ compreſo dalle tangenti tirate da' medeſimi punti M, Q.

Eucl. l. 1. p. 32.

Perchè nell' iperbole ſarà l'angolo MFK eguale all'angolo MVF, e all' angolo FMV, che è duplo dell'angolo VMG, per la prop. 20. aggiunto di comune l'angolo MVF un' altra volta, ſarà la ſomma de' due angoli MFK, MVF dupla degli angoli VMG, MVF, cioè del ſolo angolo MGF, ovvero HGL. Nella ſteſſa maniera ſi proverà rà la ſomma de' due angoli Q F K, Q V F dupla dell'angolo F H Q, dunque la ſomma degli angoli M F Q, M V Q è dupla delli due angoli H G L, G H L, cioè dell'angolo M L Q compreſo dalle tangenti.

Ma nell'elliſſe eſſendo gli angoli M V F, M G V eguali al ſolo I M V, cioè a G M F, per la prop. 20. aggiunto un' altra volta l'angolo M G V, ſarà l'angolo M V F col duplo di M G V, ovvero di H G L eguale all'angolo G M F, coll'angolo M G V, cioè al ſolo M F V. Nella ſteſſa maniera ſi proverà eſſere l'angolo Q F V eguale all'angolo Q V F col duplo di G H L; dunque tutto l'angolo M F Q uguaglia l'angolo M V Q col duplo de' due angoli H G L, G H L, cioè col duplo dell'angolo M L Q, e tolto da amendue le parti l'angolo M V Q, reſta l'eceſſo di M F Q ſopra M V Q eguale al duplo dell'angolo M L Q compreſo dalle tangenti; il che ec.

Corollario.

I.

Se dagli eſtremi di una retta Q F E tirata pel fuoco F ſi condurranno le tangenti Q T, E T, l'angolo E T Q nell'iperbole ſarà ſempre ottuſo, eſſendo la metà della ſomma degli angoli Q F K, E F K, E V Q maggiori de' due retti fatti dalla retta medeſima Q E coll'aſſe. Ma nell'elliſſe, ſarà il detto angolo E T Q ſempre acuto, eſſendo la metà dell'eceſſo di due retti ſopra l'angolo E V Q.

Propoſizione XXXIII.

Figur. 61. e 64.

Sia Q N il lato traſverſo, ed N G il lato retto dell'iperbole, o dell'elliſſe D N E; i cui fuochi F, H, ed il centro C, dico eſſere la diſtanza de' fuochi H, F media proporzionale fra il lato traſverſo QN, e la QG, che è la ſomma nell' iperbole, e la differenza nell' elliſſe de' lati retti, e traſverſo.

prop. 20. di queſto

Perchè il rettangolo QFN uguaglia la quarta parte del rettangolo QNG, aggiungendo nell' iperbole, e ſottraendo nell' elliſſe queſto, o quello al medeſimo quadrato del ſemidiametro traſverſo NC, avremo il quadrato FC eguale alla ſomma nell' iperbole, ed alla differenza nell' elliſſe del ſuddetto quadrato NC, e della quarta parte del rettangolo QNG; e quadruplicando i termini, ſarà il quadrato della diſtanza de' fuochi HF eguale alla ſomma nell' iperbole, o alla differenza nell' elliſſe, del quadrato QN, e del rettangolo QNG, cioè eguale al rettangolo NQG; dunque HF è media fra il traſverſo QN, e la QG, ſomma d'ambo i lati nell' iperbole, e differenza di eſſi nell' elliſſe; il che ec.

Eucl. lib. 2. prop 2.

Corollario.

I.

Il quadrato della diſtanza de' fuochi F, H ſta al quadrato del ſecondo aſſe IK (ovvero dimezzando i lati, il quadrato CF al quadrato IC) come GQ, ſomma nell' iperbole, e differenza nell' elliſſe, de' lati traſverſo, e retto, ſta al lato retto NG; perchè moltiplicando in NQ, ſi averà il rettangolo NQG eguale al quadrato HF, ed il rettangolo GNQ eguale al quadrato IK.

Propoſizione XXXIV.

Figur. 65. e 66.

Sia l' iperbole, o l' elliſſe DN tagliata dal cono BDFT, dalla cui cima T condotta una retta TA paralle-

la al diametro FB della baſe del cono, convenga col lato traſverſo QN della ſezione in A; ſarà il rettangolo NAQ al quadrato AT, come il traſverſo QN al retto NG.

Perchè eſſendo QN ad NG come il rettangolo QCN al quadrato DC, cioè al rettangolo BCF, vale a dire in ragione compoſta di QC a CF, e di NC a CB, delle quali la prima è la ſteſſa, che di QA ad AT, e la ſeconda la medeſima, che di NA ad AT, la ragione compoſta di queſte, che è quella del rettangolo QAN al quadrato AT, ſarà eguale a quella del traſverſo QN al retto NG; il che ec.

Corollarj.

I.

Circoſcrivendo un cerchio al triangolo QTN, ſegato dalla TA prolungata in H, perchè il rettangolo HAT uguaglia l'altro NAQ, ſarà HAT al quadrato AT, cioè HA ad AT, come QN ad NG.

II.

Componendo nell'iperbole, e dividendo nell'elliſſe ſarà HT a TA come la ſomma del traſverſo, e del retto nell'iperbole, o come la loro differenza nell'elliſſe al retto NG.

III.

Ed HT ad AH ſarà come la ſomma riſpettivamente, o la differenza del traſverſo, e del retto al traſverſo QN.

IV.

E perchè quando il cono foſſe retto, ſarebbe il triangolo per l'aſſe TBF equicrure, e la TA parallela ad FB farebbe gli angoli ATN, QTH eguali, ovvero, congiunte HN, HQ, eguali gli angoli HQN, HNQ, ed il punto H ſarebbe il vertice della porzione NHQ, e però il quadrato HQ eguale al rettangolo THA; ſarà allora il quadrato HQ al quadrato HA co-

Eucl. lib. 1. prop. 5. e 29.

me H T ad A H, cioè come reſpettivamente la ſomma,o la differenza del traſverſo, e del retto al traſverſo.

V.

Tirata finalmente Q E parallela al diametro della baſe B F, ſarà l' intercetta N E (cioè la ſomma delle rette N T, T Q nell' iperbole, e la differenza loro nell' elliſſe) eguale alla diſtanza de' fuochi della ſezione; eſſendo per la ſomiglianza de' triangoli Q H A, E Q N (come moſtrano gli angoli A Q H, A T N, ovvero Q E N eguali, e l' angolo A H Q eguale a Q N E, per eſſere nello ſteſſo ſegmento, o perchè ſuppliſce collo ſteſſo T N Q la ſomma di due retti) il quadrato E N al quadrato del traſverſo Q N, come il quadrato H Q al quadrato H A, cioè come la ſomma riſpettivamente, o la differenza del traſverſo, e del retto al traſverſo: nella qual ragione per la prop. 33. è ancora il quadrato della diſtanza de' fuochi al quadrato del traſverſo, e però la detta E N uguaglia la diſtanza de' fuochi.

Propoſizione XXXV.

Figur. 66. e 67.

Nell' iperbole, e nell' elliſſe, tirata da qualunque punto R una tangente, che concorra con due diametri conjugati Q N, A B ne' punti G, M, ſarà il rettangolo G R M eguale alla quarta parte della figura, che appartiene al diametro C R, che paſſa per lo contatto: ovvero eguale al quadrato del ſemidiametro ſuo conjugato C H.

Tiriſi ancora la tangente H K, che convenga col ſemidiametro C A in K, e ſi ordinino H F, R E al diametro A B, ed H I, R O al diametro N Q, ſiccome A L al diametro C H, ed A D al diametro R C. Per eſſere C H a C L come C K a C A, o come A C a C F, ſa-

Coroll. 13. prop. 12. di queſto.

rà il triangolo HCF eguale al triangolo ACL, e però ancora il triangolo HCI pareggerà il triangolo ADC; per una ſimil ragione eſſendo RC a CD come MC a CA, o come CA a CE, il triangolo ADC uguaglia l'altro RCE (che nell'elliſſe ha l'angolo C comune, e nell'iperbole lo ha conſeguente all'altro in ſupplemento di due retti) ovvero RCO, dunque il triangolo HCI uguaglia RCO, e ſta il triangolo GOR al triangolo RCO come GO ad OC, o come CE ad EM, o come il triangolo REC al triangolo REM; dunque ſta GRO a CHI come CHI ad RME, e ſono ſimili; dunque i lati loro omologhi GR, CH, RM ſono proporzionali, e però il rettangolo GRM uguaglia il quadrato CH, ovvero la quarta parte della figura, che al diametro RCS appartiene; il che ec.

* * *

Corollarj.

I.

Figur. 68. e 69.

Circonſcrivendo un cerchio al triangolo CMG, che reſti ſegato dal diametro CR in P, ſarà la PR eguale alla metà del lato retto appartenente al diametro RC; perchè il rettangolo CRP uguaglierà il rettangolo MRG, cioè la quarta parte della figura, che è quanto il rettangolo del ſemidiametro CR nella metà del ſuo lato retto.

II.

Se il diametro CR, nella figura dell'iperbole toccaſſe il cerchio CGM, coincidendo il punto P col punto C, ſarebbe RP eguale ad RC, onde l'iperbole ſarebbe equilatera, avendo la metà del lato retto eguale al ſemidiametro traſverſo.

* * *

Propoſizione XXXVI.

Figur. 72. e 73.

Nell' iperbole, e nell' elliſſe l'inclinate da' fuochi F, V a qualunque punto R della ſezione, contengono un rettangolo VRF eguale alla quarta parte della figura, che appartiene al diametro RC, che paſſa pel medeſimo punto R.

prop. 20. di queſto

Eucl. l. 3. p. 21.

Si circoſcriva al triangolo VRF il cerchio VMF, che convenga colla tangente GR nel punto M, e congiungaſi al centro MC, ed al fuoco MF; eſſendo gli angoli FRG, VRM eguali, e queſto eguale ad MFV, ſarà MFV eguale ad FRG, e il rimanente MFG eguale al rimanente MRF, onde i triangoli FMG, FMR, che inoltre hanno l'angolo M comune, ſaranno equiangoli, e però l'angolo RFM uguaglierà l'angolo MGF, ovvero RGV,

ed il quadrato MF uguaglierà il rettangolo GMR; onde il punto M ſarà il vertice della porzione VMF, e la retta AC perpendicolare all' aſſe NQ ſarà l' aſſe ſecondo conjugato al primo; dunque per la Prop. antec. il rettangolo GRM uguaglierà la quarta parte della figura attenente al diametro RC. Ed eſſendo l'angolo RVF eguale all'angolo GMF, e l' angolo RFM uguale ad RGV, ſono i triangoli VRG, MRF ſimili, onde VR ad RG ſta come MR ad RF, e però il rettangolo VRF eguaglia GRM; dunque ancora VRF pareggia la quarta parte della fig. attenente al diametro RC; il che, ec.

Corollarj.

I.

Quindi ſi ha che il ſemidiametro CH conjugato ad RC è medio proporzionale fra le diſtanze de' fuochi FR, VR dal punto R, eſſendo do il rettangolo VRF eguale alla quarta parte della figura, cioè al quadrato CH.

II.

VR ſarà ad RC, come la metà del lato retto del diametro RC ad RF, per eſſere il rettangolo VRF eguale al prodotto del ſemidiametro RC nella metà del lato retto, che fa la quarta parte della figura.

Figur. 70. e 71.

III.

Da' termini di qualunque diametro RS inclinando ad un fuoco F le rette RF, SF, queſte conterranno il rettangolo RFS eguale alla quarta parte della figura appartenente allo ſteſſo diametro, perchè SF uguaglia VR, eſſendo baſi de' triangoli FCS, RCV, che intorno l'angolo C hanno i lati eguali, e però SFR uguaglia VRF.

Propoſizione XXXVII.

Figur. 74. e 75.

Nell' elliſſe la ſomma del rettangolo VRF contenuto dall' inclinate da' fuochi a qualunque punto R, e del quadrato del ſemidiametro corriſpondente RC: e nell' iperbole la loro differenza è ſempre uguale ad una medeſima coſtante quantità, che è la differenza della metà del quadrato traſverſo QN, dal quadrato della diſtanza d' un fuoco dal centro VC.

Coroll. 1. e 2. della prop. 21. di queſto

Eucl. l. 2. p. 4. e p. 12. e 13.

Perchè nell' elliſſe la ſomma dell' inclinate da' fuochi, e nell' iperbole la loro differenza ſi è moſtrata uguale al traſverſo QN; dunque il quadrato VR, col quadrato RF, aggiunto nell' elliſſe, e detratto nell' iperbole il duplo rettangolo VRF, uguaglia il quadrato QN; ma il quadrato VR col quadrato RF (dividendoſi dalla RC per mezzo la baſe del triangolo VRF) uguaglia il duplo del quadrato CR, ed il duplo VC; dunque due quadrati CR, con due quadrati VC, aggiungiunto nell' elliſſe, e detratto nell' iperbole il duplo rettangolo VRF uguagliano il quadrato QN, e dimezzando i termini, ſarà il quadrato CR col quadrato VC, aggiunto nell' elliſſe, e tolto nell' iperbole il rettangolo VRF, uguale alla metà del quadrato QN, e levatone dall' una, e dall' altra parte il quadrato VC, ſarà il quadrato CR colla giunta nell' elliſſe, e col defalco nell' iperbole del rettangolo VRF, eguale alla metà del quadrato QN, toltone il quadrato VC, che è una quantità coſtante per qualſivoglia punto R; il che ec. E quando accaderà nell' iperbole eſſere il rettangolo VRF maggiore del quadrato CR, ſarà ancora il quadrato VC maggiore della metà del quadrato QN, e l' ecceſſo del predetto ſopra il ſecondo uguaglierà l' ecceſſo del terzo ſopra il quarto; onde ſempre le differenze di qualunque rettangolo VRF, e del quadrato RC ſaranno eguali ad una ſteſſa quantità.

Corollarj.

I.

Eſſendoſi il quadrato del ſemidiametro CH conjugato ad RC dimoſtrato eguale al rettangolo VRF, è manifeſto che nell' elliſſe la ſomma de' due quadrati HC, CR, e nell' iperbole la differenza loro, ſarà ſempre la medeſima, cioè eguale alla ſomma, o differenza de' quadrati AC, CN.

Prop. 36. di queſto

II.

E quadruplicando i termini, ſarà nell' elliſſe la ſomma de' quadrati fatti da qualſivoglia coppia de' diametri conjugati, eguale alla ſomma de' quadrati fatti dagli aſſi; e nell' iperbole la differenza de' quadrati di due qualunque diametri conjugati, eguale alla differenza de' quadrati degli aſſi.

III.

Nell' iperbole equilatera, eſſendo la ſomma del retto, e del traſverſo dupla del traſverſo, e però il quadrato FV duplo del quadrato QN per la prop. 33. e preſa dell' uno, e dell' altro termine la quarta parte, il quadrato VC uguale alla metà del quadrato QN, ſarà ſempre il quadrato di qualunque ſemidiametro RC eguale al rettangolo VRF, ovvero al quadrato del ſemidiametro conjugato CH, eſſendo nulla la loro differenza.

IV.

Nell' elliſſe la differenza del rettangolo VRF da un altro rettangolo VAF ſimilmente contenuto da due inclinate da' medeſimi fuochi ad un altro punto A, è uguale alla differenza del quadrato del ſemidiametro AC dal quadrato di RC; e ſimilmente alla differenza de' quadrati de' ſemidiametri conjugati HC, QC.

V.

Ma nell' iperbole la ſomma del quadrato CR, e del quadrato CA, ovvero del rettangolo VNF, uguaglia la ſomma del quadrato CQ, e del quadrato CH, ovvero del rettangolo VRF.

Propoſizione XXXVIII.

Fig. 76. 77.

Steſa pel fuoco F la retta RS, e tirato il diametro TH parallelo alla medeſima, ſarà queſto medio proporzionale fra l' aſſe NQ, e la detta RS.

Tirata la tangente RG, che conviene colla TH in G, rimanendo CG eguale al ſemiaſſe CN, per la prop. 21. e condotta VD parallela ad RS, ſi congiunga RD, che dalla TH rimarrà diviſa per mezzo in E, ſiccome FV è diviſa per mezzo in C, onde RD ſarà una dell' ordinate al diametro TH, e CE ſarà media aritmetica tra le due FR, VD, ovvero FR, FS, giacchè queſta egualmente che la VD s' inclina dal fuoco ſopra l' aſſe, facendo gli angoli DVQ, SFN eguali, e però la ſomma dell' eſtreme, cioè la intera RS uguaglia il duplo della mezzana CE; ma altresì TH è dupla di CH, e QN dupla di CG; dunque RS, HT, NQ ſarannno in continua proporzione, ſiccome la CE, CH, CG ſono proporzionali, pel coroll. 13. della prop. 12.

Corollarj.

I.

Sia MA il lato retto attenente al diametro MK, a cui è ordinata la SR, che paſſa pel fuoco; ſarà SR ad MA come MK all' aſſe NQ, perchè eſſendo proporzionale SR, TH, NQ, il rettangolo di SR, ed NQ pareggia il quadrato TH, cioè la fig. AMK; e però come il diametro MK ſta all' aſſe NQ, così la retta SR, che paſſa pel fuoco, ſta al lato retto MA del ſuo diametro.

Eucl. l. 6 p. 14.

II.

Eſſendo il quadrato della ſemiordinata OS al quadrato del ſemidiametro HC come il rettangolo KOM al quadrato MC, e per eſſere

Prop. 6. di queſto

proporzionali RS, HT, NQ, ſiccome le loro metà, eſſendo il quadrato OS al quadrato HC, come queſto al quadrato CN, ſarà il rettangolo KOM al quadrato MC come il quadrato HC al quadrato CN, o come il rettangolo QFN al quadrato ſuddetto CN.

20. di queſto

III.

E però permutando, ſono i rettangoli KOM, QFN, come i quadrati CM, CN, ovvero in duplicata ragione de' diametri KM, QN.

IV.

Se per lo ſteſſo, o per ciaſcuno de' fuochi F, V di una medeſima ſezione ſaranno ſteſe più rette RS, GE, ſaranno queſte come i quadrati de' diametri loro paralleli HT, LK, eſſendo queſti eguali riſpettivamente a' rettangoli di RS in NQ, e di GE in NQ.

Fig. 78. e 79.

Per queſta 38.

* * *

Pro-

Propoſizione XXXIX.

Fig. 80. e 81. Toccando RH l' iperbole, o l'elliſſe RQ, ſe dal contatto R, e dal centro C ſi tireranno le perpendicolari ſopra la detta tangente, cioè RP terminata dall' aſſe NQ, e CM, conterranno eſſe perpendicolari un rettangolo eguale alla quarta parte della figura, cioè al quadrato del ſemiaſſe conjugato CA.

Perchè tirando l' ordinate RO, RI ſopra ambi li diametri, eſſendo ſimili i triangoli HCM, PRO, ſarà PR ad RO, ovvero CI, come CH a CM; dunque il rettangolo di PR in CM uguaglia il rettangolo HCI, cioè il quadrato CA, che è la quarta parte della figura; il che, ec. *Coroll. 3. prop. 12. di queſto*

Pro-

Propoſizione XXXX.

Fig. 82. Se da qualunque punto R di una ſezione conica ſi tirerà la perpendicolare alla tangente RG, che ſia RP concorrente coll' aſſe NP in P, e quindi ſopra il ramo FR inclinato dal fuoco F al medeſimo punto R, ſi tiri la perpendicolare PE, ſarà l' intercetta RE eguale alla metà del lato retto dell' aſſe.

Nella parabola ciò è troppo manifeſto, perchè tirata l' ordinata RO, ſarà il triangolo RPO ſimile, ed uguale a PRE, eſſendo che tirata RS parallela all' aſſe, l' angolo FRP eguaglia l' altro PRS, cioè l' alterno RPO; dunque RE uguaglia la ſunnormale OP, cioè la metà del lato retto pel corollario 3. della prop. 12. *Prop. 18. di queſto*

Ma

Fig. 83. e 84.

Prop. 20. di queſto

Ma nell' elliſſe, e nell' iperbole congiungaſi all'altro fuoco RS, e da' fuochi, e dal centro tirinſi ſopra la tangente le perpendicolari SH, CM, FZ. Eſſendo gli angoli alterni ZFR, ERP uguali, ſarà il triangolo PER ſimile al triangolo FZR, ſiccome ancora al triangolo SRH, per eſſere gli angoli FRZ, SRH uguali, dunque ſarà SH ad SR come ER ad RP, ed il rettangolo SRE uguaglierà SH in RP, e ſimilmente FZ ad FR come ER ad RP, e pertanto il rettangolo di FZ in RP uguaglierà il rettangolo FRE; dunque la ſomma, o la differenza de' rettangoli SRE, FRE (cioè il rettangolo di RE nell'aſſe traſverſo NQ che nell' elliſſe è la ſomma, e nell' iperbole è la differenza di FR, ed SR) uguaglierà la ſomma, o la differenza de'rettangoli SH in RP, ed FZ in RP; ma eſſendo nell'elliſſe la ſomma di FZ, ed SH, e nell'iperbole la loro differenza eguale al duplo di CM (perchè tirata FH concorrente con CM in V, per eſſere SF, dupla di FC, e SH dupla di CV, ed FZ dupla di VM) la ſomma, o differenza dei detti rettangoli è dupla di CM in RP, cioè per la prop. 39. dupla della quarta parte, della fig. cioè eguale al rettangolo dell'aſſe traſverſo QN, nella metà del lato retto; dunque il rettangolo dell'aſſe QN in RE uguaglia quello del medeſimo QN nella metà del lato retto, e però RE è uguale ad eſſa; il che ec.

Propoſizione XXXXI.

Fig. 83. e 84.

Nell'elliſſe, e nell' iperbole tirata la tangente RG, e ad eſſa la perpendicolare RP dal punto del contatto, reſterà l'aſſe diviſo armonicamente ne' fuochi F, S, e ne' punti P, G del concorſo del-

la detta perpendicolare, e della tangente coll'aſſe.

Per la ſimilitudine de' triangoli FRZ, RSH, ſta FZ ad SH come ZR ad RH; ma la prima ragione uguaglia quella di FG a GS, la ſeconda quella di FP a PS, dunque ſta FG a GS come FP a PS; e però i punti F, P, S, G dividono l'aſſe armonicamente; il che, ec.

Corollarj.

I.

Le tre linee CP, CS, CG ſono continuamente proporzionali, perchè eſſendo FP a PS come FG a GS, ſarà componendo nell'elliſſe, e paragonando la differenza de' termini al conſeguente nell'iperbole, FS, ad SP come la ſomma, o la differenza di FG, ed SG ad SG, e dimezzando gli antecedenti ſarà CS ad SP come CG a GS; e paragonando gli antecedenti alla differenza de' termini, CS à CP, come CG a CS.

Eucl. l. 5. coroll del la prop. 19.

II.

Sicchè il quadrato della diſtanza d'un fuoco dal centro, cioè di CS, o di FC uguaglia il rettangolo PCG fatto dall'intercette fra il centro, ed i concorſi dell'aſſe colla tangente, e colla perpendicolare alla curva.

III.

Condotta l'ordinata RO, eſſendo ancora il rettangolo GCO eguale al quadrato CN, ſarà il quadra CF al quadrato CN come CP a CO; onde la diſtanza dal centro C del concorſo P della perpendicolare, alla diſtanza dal medeſimo centro del punto O, in cui batte l'ordinata, è in una coſtante ragione duplicata di quella delle diſtanze del fuoco, e del vertice della ſezione dal centro.

Coroll. 13. prop. 12 di queſto

Propoſizione XXXXII.

Nell' iperbole la ſomma dell' inclinate da' fuochi ad u-

Fig. 85. e 86.

no ſteſſo punto della ſezione, cioè FR, SR, e nell' elliſſe la loro differenza, ſta alla diſtanza de' fuochi S, F, come la CO, diſtanza dell' ordinata RO dal centro, alla CN metà dell' aſſe tranſverſo QN.

Sia la tangente RG, e ad eſſa 20 di questo, e 29. del pr. d'Eucl. ſi tirino parallele dal fuoco F, e dal centro C le rette FH, CI. Eſſendo le inclinate da' fuochi egualmente inclinate ſulla tangente, o ſulla parallela FH, ſarà FR eguale ad RH, e però SH ſarà la ſomma nell' iperbole, e la differenza nell' elliſſe delle inclinate da' fuochi SR, FR. Ma ſta SH ad FS come IR a CG, ed è IR eguale alla metà 34. del pr. d' Euclid. dell' aſſe traſverſo (per eſſere eguale alla CM condotta dal centro parallela ad SR fino alla tangente RG, che uguaglia CN per la prop. 21.) dunque la ſomma, o la differenza riſpettivamente dell' inclinate da' fuochi, ſta alla diſtanza di un fuoco dall' altro come CN a CG, o come CO diſtanza dal centro dell' ordinata, alla metà del traſverſo CN; il che ec. Coroll. 13. prop. 12 di questo

Corollarj.

I.

Quindi la differenza dell' inclinate da' fuochi ad uno ſteſſo punto dell' elliſſe, e la ſomma di eſſe nell' iperbole è proporzionale alla diſtanza dell' ordinata dal centro, eſſendo la quarta proporzionale dopo CN, ed SF coſtanti, e dopo la diſtanza ſuddetta CO.

II.

Onde è facile inclinare tali rette da' fuochi a diverſi punti della ſezione, le cui differenze nell' elliſſe, e le cui ſomme nell' iperbole ſieno in qualunque data ragione.

* * *

Propoſizione XXXXIII.

Fig. 87. e 88.

Nel diametro BD conjugato a QN ſiano due punti G, E egualmente diſtanti dal centro C, e da qualunque punto R dell' elliſſe, o dell' iperbole ſi ordini ſopra il ſuddetto diametro BD la RO, dico che nell' elliſſe la ſomma, e nell' iperbole la differenza del quadrato OR da quello ſpazio, il quale ſtia a due quadrati GO, EO come il quadrato QN al duplo del quadrato BD, ſarà ſempre una quantitá coſtante, cioè eguale reſpettivamente alla ſomma, o differenza del quadrato NC, e di quello ſpazio, che al quadrato CG

ſtia come il quadrato QN al quadrato BD.

Perchè eſſendo la retta GE diviſa per mezzo in C, e non per mezzo in O, ſaranno i quadrati EO, OG dupli de' quadrati GC, OC; dunque uno ſpazio, che ſtia a' quadrati EO, OG come il quadrato QN al duplo del quadrato BD, ſarà duplo di uno ſpazio, che ſteſſe a' quadrati GC, OC nella ſteſſa proporzione; ovvero eguale ad uno ſpazio, che foſſe a' detti quadrati GC, CO come due quadrati NQ al duplo del quadrato BD, o come il quadrato NQ al ſolo quadrato BD, ma in tale ragione ſta appunto il rettangolo NKQ al quadrato RK, ovvero OC; dunque lo ſpazio, che ſta a' quadrati EO, OG, come il quadrato QN al duplo del quadrato BD, uguaglia il rettangolo QKN con tale ſpazio, che ſtia al quadrato GC, come il quadrato NQ al ſolo quadrato BD. E ſe al quadrato OR ſi aggiungeranno nell'elliſſe, o ſi leveranno nell' iperbole gli ſpazj ſuddetti, a-

Eucl. l. 2. prop. 9.

tremo, eſſere il quadrato R O nell' elliſſe congiuntovi, e detrattovi nell' iperbole lo ſpazio, che ſta a' quadrati GO, EO, come il quadrato QN al duplo del quadrato BD, eguale al quadrato CN (che è la ſomma nell' elliſſe, e la differenza nell' iperbole del rettangolo QKN, e del quadrato OR, ovvero CK) con tale ſpazio, che ſtia al quadrato GC come il quadrato NQ al quadrato BD; che è una quantità coſtante; dunque ec.

Corollarj.

I.

Facendoſi il quadrato CS al quadrato CG, come il quadrato QN al duplo del quadrato BD, congiunte le rette GS, ES, colle quali concorra l' ordinata OR ne' punti I, H, è manifeſto che i quadrati IO, HO ſtaranno riſpettivamente a' quadrati OG, OE nella ſuddetta proporzione; e però nell' elliſſe la

ſomma de' quadrati HO, IO, e del quadrato OR, e nell' iperbole la differenza di queſto da quelli, ſarà ſempre la medeſima quantità, cioè uguale riſpettivamente alla ſomma, o differenza del quadrato NC, e del duplo del quadrato CS.

II.

Fig. *89.*

Nel cerchio, che è un elliſſe equilatera, eſſendo i quadrati NQ, BD eguali, ſarà la ſomma del quadrato OR, e della metà de' quadrati GO, EO ſempre eguale a' due quadrati CN, CG, ovvero al ſolo quadrato GN; e per la ſteſſa ragione nell' iperbole equilatera la differenza del quadrato RO dalla metà de' quadrati GO, EO, ſarà eguale alla differenza de' quadrati GC, CN.

III.

Quando il medeſimo quadrato NQ è duplo del ſuo lato retto, nell' elliſſe la ſomma, e nella iperbole la differenza degli ſteſſi quadrati GO, OE, e del quadrato OR, uguaglierà la ſomma, o differenza del duplo quadrato di GC, e del quadrato CN.

IV.

Figur. 90. E ſe in quel caſo i punti G, E ſaranno preſi ne' termini del diametro B, D, allora nell' iperbole la differenza del duplo quadrato di GC, ovvero BC, dal quadrato CN, ſarà nulla, e però gli ſteſſi quadrati GO, ovvero BO, e DO ovvero OE uguaglieranno il quadrato dell' ordinata OR, non potendo differire da eſſo.

Propoſizione XXXXIV

Figur. 52. Se col lato retto NR uguale al traſverſo ſi farà l' iperbole NM, che chiamaſi equilatera, e collo ſteſſo lato retto ſopra il medeſimo aſſe ſi deſcriverà la parabola NB, tirando qualunque retta BD parallela all' aſſe, che convenga col ſecondo diametro tirato per lo centro C nel punto D, e tagli l' iperbole in M, e la parabola in B, ſarà lo ſpazio iperbolico CNMD, uguale al rettangolo del ſemidiametro traſverſo CN nella curva parabolica NB.

Si ordini nell' iperbole NM, la MK, e la AB nella parabola toccata in B dalla retta BG, cui ſia perpendicolare BP, e ſi congiunga DN. Si è veduto nel corollario 3. della propoſizione 12. che la ſunnormale AP, intercetta nell' aſſe fra l' ordinata, e la perpendicolare alla curva, uguaglia la metà del lato retto, e però è eguale alla NC, che è la metà del traſverſo uguale al retto, ma CD è eguale, e parallela ad AB, dunque la perpendicolare BP è eguale alla ND, e per eſſere il rettangolo QKN al quadrato KM come il traſverſo al retto, cioè in ragione d' egualità, aggiunto ad ambedue di comune il quadrato NC, ſi fa il quadrato CK, ovvero DM, Eucl. l. 2 p. 6.

uguale alla ſomma de' quadrati KM o pure DG, e CN, cioè al quadrato ND; dunque DM ancora uguaglia la BP; prendaſi nella tangente GB un punto I quanto ſi voglia proſſimo al punto B, é manifeſto, che la particella della tangente BI infinitamente piccola può prenderſi per una parte della curva parabolica BH, da cui può differire d' una grandezza minore di qualunque data, e per lo punto I tirando la linea HIE parallela a BD, cui parimente ſarà infinitamente proſſima, ne verrà il rettangolo EDMO, che potrà prenderſi come eguale allo ſpazio iperbolico EDMF, da cui altresì può differire per una quantità minore di qualunque data, e per la ſomiglianza de' triangoli IBH, ABP, ſarà IB alla BH, ovvero alla DE come BP, alla PA, cioè come DM a CN, onde il rettangolo delle eſtreme, cioè della particella IB nel ſemidiametro traſverſo CN uguaglierà il rettangolo delle mezzane ED, MD, che coincide collo ſpazio iperbolico EDM

F,

F, il che ſempre accadendo, è manifeſto, che il rettangolo della ſteſſa NC in tutte le particelle infinitamente piccole della curva parabolica NB uguaglia la ſomma de' rettangoli infinitamente piccoli circoſcritti allo ſpazio iperbolico CNMD, e però il detto ſpazio è uguale al rettangolo del ſemidiametro traſverſo, e della curva parabolica; il che ec.

Corollario.

Si noti eſſerſi provato, che la retta DN uguaglia la retta DM; onde naſce un modo faciliſſimo da deſcrivere l' iperbole equilatera inclinando dallo ſteſſo punto N ſopra la CD infinite rette NE, ND, ed a queſte ponendo uguali le rette EF, DM parallele all' aſſe CN.

* * *

Pro-

Propoſizione XXXXV.

Se collo ſteſſo aſſe traſverſo NQ, e col lato retto NG ſi deſcriva l' iperbole NABK, e col retto NR uguale a QN ſia fatta l' iperbole equilatera NMK, preſa una media proporzionale NT fra i due retti lati RN, NG, ſarà lo ſpazio NBK allo ſpazio NMK come NG ad NT.

Figur. 53.

Si ordini qualſivoglia altra FAH, ſarà il quadrato BK al rettangolo QKN, cioè al quadrato KM, che l' uguaglia nell' iperbole equilatera, come il retto GN al traſverſo NQ, o pure all' altro retto NR, ma come GN a NR così ſta il quadrato GN al quadrato della media proporzionale NT, dunque il quadrato BK al quadrato MK ſta come il quadrato GN al quadrato NT; onde la

Prop. 5. di queſto

ſteſſa linea BK alla linea MK ſta come GN ad NT: ſimilmente ſi dimoſtrerà, che la linea AH alla linea FH ſta nella ſteſſa proporzione della GN ad NT; dunque tutte le linee ordinate nell' iperbole NBK a tutte le corriſpondenti ordinate nell' altra NMK ſono ſempre nella ſteſſa ragione della GN alla NT, e però anche lo ſpazio di qualſivoglia iperbole NBK allo ſpazio dell' iperbole equilatera NMK deſcritta dallo ſteſſo aſſe traſverſo, ſta come il lato retto GN della prima iperbole alla retta NT media proporzionale fra il retto, ed il traſverſo; il che ec.

Propoſizione XXXXVI.

Fig. 49.

Lo ſpazio della parabola KAC è eguale a $\frac{2}{3}$ del circonſcritto parallelogrammo IHCK.

Si ordini la retta DB al diametro

tro AE, e congiunta AC, per lo punto B ſi tiri FBL parallela al diametro AE, e s' intenda un cilindro deſcritto dal parallelogrammo, AECH, ed un cono deſcritto dal triangolo ACH nel rivolgerſi ambedue queſti ſpazj d' intorno l' aſſe AH, ſarà il cerchio deſcritto dal raggio FL nel cilindro, al cerchio deſcritto dal raggio ML nel cono, come il quadrato FL, o pure CH al quadrato ML, cioè come il quadrato HA al quadrato AL, o pure come il quadrato CE al quadrato DB, la qual ragione è la medeſima, che della retta EA alla retta DA, o pure della retta FL alla retta LB, e ciò ſempre ſuccede dovunque ſia preſo il punto B, dunque tutti i cerchj del cilindro AECH a tutti cerchi del cono CAH ſono come tutte le linee uguali ad FL nel parallelogrammo AECH a tutte le linee BL del trilineo parabolico ACH, e però il detto parallelogrammo a queſto trilineo ſarà come il cilindro al cono inſcritto, cioè in ragione tripla come di 3. a 1. e per converſione di ragione il medeſimo parallelogrammo AECH allo ſpazio parabolico ABCE è in ragione ſeſquialtera, cioè come 3. a 2. onde il detto ſpazio ABCE ſarà $\frac{2}{3}$ del parallelogrammo AECH, e tutta la parabola KAC ſarà pure $\frac{2}{3}$ del parallelogrammo KIHC; il che ec.

Prop. 4. di queſto

Eucl. l. 12. p. 10.

Corollario.

Quindi è chiaro, eſſere la parabola ſeſquiterza dell' iſcritto triangolo KAC, cioè ſtare ad eſſo come 4. a 3. imperciocchè eſſendo la parabola al parallelogrammo, come 4. a 6. e'l parallelogrammo al triangolo come 6. a 3. ſtarà per l' ugualità la parabola al triangolo come 4. a 3.

Propoſizione XXXXVII.

Figur. iſteſſa

Girando la parabola d' intorno al diametro A E la conoide parabolica, che ne naſce, è la metà del cilindro deſcritto dal parallelogrammo A H C E, d'intorno allo ſteſſo aſſe A E rivoltato.

Perchè il cerchio dal raggio D N generato nel cilindro al cerchio del raggio D B nato nella conoide ſta come il quadrato N D, o pure E C, al quadrato B D, cioè come la linea E A alla linea A D, o pure come la C E, cioè la N D alla D G, dunque il cilindro alla conoide ſta come il parallelogrammo E H al triangolo E A C, cioè in ragione duplicata; il che ec.

Propoſizione XXXXVIII.

Fig. 50. Il cerchio A P è eguale al triangolo rettangolo C A B, l'altezza di cui ſia il raggio A C, e la baſe A B uguagli la circonferenza A P come

ſe diſteſa foſſe in una linea retta.

Per qualſivoglia punto D preſo nel raggio C A ſi tiri nel triangolo la retta D E parallela alla baſe A B, e nel cerchio la periferia D F concentrica all'altra A P; ſarà dunque A B alle D E come il raggio A C, al raggio C D, o come la circonferenza A P alla circonferenza D F (eſſendo manifeſto, che ſiccome i contorni de' poligoni regolari ſimili di qualunque numero di lati ſiano, iſcritti ne' cerchi, ſono, come ſemidiametri di eſſi, per la ſimiglianza, ed egual numero de' triangoli fatti nell'uno, e nell' altro poligono, con tirare i raggi a ciaſcun angolo; così lo ſteſſo vale ne' contorni de' cerchi medeſimi, che ſono poligoni d'infiniti lati) e ciò ſempre accaderà, e per eſſere A B uguale alla circonferenza A P ſarà D E uguale alla circonferenza D F, ſicchè tutte le rette D E parallele alla baſe del triangolo C B A uguaglieranno tutte le corriſpondenti circonferenze concentriche tirate per gli medeſimi punti dentro il cerchio A P; e però il cerchio medeſimo A P uguaglierà il detto triangolo C A B; il che ec.

Corollario.

Quindi è chiaro eſſere il cerchio uguale al rettangolo del raggio nella metà della circonferenza, o pure al rettangolo della metà del raggio in tutta la circonferenza; e perchè, ſecondo Archimede, il diametro alla circonferenza ſta come 7. a 22. à un di preſſo, anche il raggio alla mezza circonferenza averá la ſteſſa proporzione; ſicchè diviſo il raggio in ſette parti, la mezza circonferenza ſarà 22. e il prodotto di queſta in quella ſarà 154, là dove il prodotto del raggio in ſe medeſimo ſarà 49. onde il cerchio al quadrato del raggio, ſtarà come 154. a 49. o pure come 22. a 7.

Pro-

Propoſizione XXXXIX.

Girando il cerchio intorno al ſuo diametro, la sfera, che ne naſce, è eguale al cono, che ha per altezza lo ſteſſo raggio A C, e per baſe un cerchio uguale alla ſuperficie sferica, che la circonda.

Fig. iſteſſa

Per qualſivoglia punto D preſo nel medeſimo raggio C A, s' intenda paſſare nel cono un piano parallelo alla baſe, che faccia il cerchio D E, e nella sfera paſſare una ſuperficie sferica D F concentrica alla prima. E' manifeſto eſſere il cerchio A B al cerchio D E, come il quadrato A C al quadrato D C, o come la ſuperficie sferica A P alla ſuperficie sferica D F, eſſendo figure ſimili, ma il primo cerchio A B ſi ſupponeva uguale alla ſuperficie sferica A B, dunque anco l' altro cerchio D E uguaglia la ſuperficie D F,

Eucl. l 6. prop. 22.

DF, e così ſempre; laonde tutti i cerchj del cono uguagliano tutte le ſuperficie sferiche incluſe nella sfera, cioè il cono medeſimo uguaglia la ſuddetta sfera, ec.

Corollario.

Eucl. l. 12. prop. 10.

Perchè ſecondo Archimede la ſuperficie sferica è quadrupla del cerchio maſſimo, da cui vien generata la sfera, e ſecondo Euclide il cono è $\frac{1}{3}$ del cilindro, che aveſſe la medeſima baſe, ed altezza, ne ſegue, che la ſuperficie di quattro cerchi maſſimi moltiplicata per $\frac{1}{3}$ del raggio dà la ſolidità della sfera; e perchè il cilindro, che aveſſe per baſe lo ſteſſo cerchio maſſimo della sfera, e per altezza il diametro della ſteſſa, ſarebbe al cilindro ſopra determinato, che ha per baſe il quadruplo del cerchio maſſimo, e per altezza $\frac{1}{3}$ del raggio cioè $\frac{1}{6}$ del diametro, in ra-

gion compoſta dell' altezza all' altezza, cioè di 6. a 1. e della baſe alla baſe, cioè di 1. a 4. le quali due ragioni compongono la ragione ſeſquialtera di 6. a 4. ovvero di 3. a 2. ne ſegue, che il cilindro circonſcritto alla sfera ſta al cilindro, che uguaglia la sfera, cioé alla sfera medeſima inſcritta, in ragione ſeſquialtera, cioè di 3. a 2.

Propoſizione L.

Figur. 51.

L'elliſſe NEQ ſta al cerchio deſcritto ſopra l' aſſe maggiore NQ, come l'aſſe minore al maggiore.

S'ordini dal centro C la retta CE, che ſega il circolo in B, e da qualſivoglia punto K, la retta KM, che ſega il cerchio in D; ſarà il quadrato CE al quadrato KM, come il rettangolo QCN al rettango-

Eucl. l. 6. coroll. p. 13. golo Q K N, cioè come il quadrato C B al quadrato K D, e però qualſivoglia linea K M nell' elliſſe alla linea K D nel circolo ſarà come C E alla C B, ovvero alla C N, cioè come l' aſſe minore al maggiore; dunque tutta l' elliſſe a tutto il cerchio è nella detta proporzione; il che ec.

Propoſizione LI.

Figur. iſteſſa

Girando l' elliſſe d' intorno al proprio aſſe, la sferoide, che ſi deſcrive, ſta alla sfera del medeſimo aſſe, come il quadrato dell' altro aſſe C E al quadrato del raggio della sfera C B.

Eucl. l. 12. p. 2. Imperocchè eſſendoſi veduto, eſſere il quadrato K M al quadrato C E, come il quadrato K D al quadrato C B, anche i cerchi deſcritti da queſti raggi ſaranno proporzionali; onde ſempre il cerchio nato nella sferoide dalla linea K M al cerchio nato nella ſfera dalla linea K D, ſarà come il cerchio C E al cerchio C B, o pure ſiccome il quadrato dell' aſſe C E al quadrato dell' aſſe C N, ſicchè la sferoide alla sfera ſarà nella proporzione ſuddetta; il che ec.

Corollario.

Si raccoglie, che anche il cilindro circoſcritto alla sferoide N E Q è ſeſquialtero della sferoide, come il cilindro circoſcritto alla sfera N B Q è ſeſquialtero della medeſima; imperocchè queſti cilindri, eſſendo ugualmente alti, ſono come le baſi, cioè come il cerchio C E al cerchio C B, o pure come la sferoide alla sfera, onde permutando il cilindro circoſcritto alla sferoide, ſta alla sferoide, come l' altro circoſcritto alla sfera, ſta alla sfera.

Propoſizione LII.

Miſura di varj ſolidi iperbolici.

Fig. 54. Primieramente ſia l'iperbole HBF, la quale co' ſuoi aſintoti AI, AG ſi rivolga intorno al diametro ABE, ſarà il ſolido prodotto dallo ſpazio aſintotico CBHI uguale al cilindro nato dal rettangolo CBEK nel rivolgerſi intorno lo ſteſſo aſſe *Prop. 25. di queſto* BE. Eſſendoſi dimoſtrato di ſopra, che il rettangolo IHG, cioè la differenza de' quadrati IE, HE uguaglia ſempre il quadrato BC, ovvero EK; onde ancora la differenza de' cerchj deſcritti da' raggi IE, HE, cioè la ciambella circolare fatta dall' intervallo IH nel rivolgerſi intorno l'aſſe BE, ſarà uguale al cerchio, che ſi deſcrive nel cilindro dal raggio EK, e per tanto il ſolido fatto dallo ſpazio CBHI, che

è come una coppa di bicchiere iperbolico, pareggerà il cilindro fatto dal rettangolo CBEK, il quale ha la ſteſſa baſe BC, e la medeſima altezza con la coppa ſuddetta. Secondariamente la conoide iperbolica nata dall' iperbole HBE uguaglia l' anello nato dal triangolo ICK rivoltato intorno lo ſteſſo aſſe BE. Perchè quella colla coppa ſuddetta nata dallo ſpazio CBHI, e queſto coll' uguale cilindro nato dal rettangolo CBEK compiſcono lo ſteſſo tronco di cono fatto dal trapezio ICBE.

Fig. 55. Rivolgendo lo ſpazio aſintotico ABCD intorno il ſecondo aſſe AF, ne naſce un' altra coppa iperbolica uguale al cilindro nato dal rettangolo BAFE parimente girato intorno ad AF, che ha la medeſima baſe colla coppa medeſima, e la ſteſſa altezza; *Coroll. 2. della Prop. 26. di queſto* perchè ſi è dimoſtrato eſſere il rettangolo HDC cioè la differenza de' quadrati FC, FD, uguale al quadrato del ſemidiametro BA, cioè della EF, che però ancora la ciambella della lar-

ghezza DC, per cui il cerchio FC differiſce dal cerchio DF, uguaglierà il cerchio del raggio FE; onde ſempre la ſezione armillare della ſuddetta coppa uguaglierà la ſezione circolare del cilindro, che però ambedue i ſolidi ſono tra di loro uguali.

Figura iſteſſa. L' anello iperbolico, nato dal ravvolgerſi del trilineo BEC intorno AF, uguaglia il cono nato dal triangolo ADF intorno la medeſima AF. Perchè quello col cilindro nato dal rettangolo ABEF, e queſto coll' ugual coppa iperbolica nata dallo ſpazio ABCD compiſcono un tronco di cilindroide iperbolica nata dallo ſpazio ABCF rivoltato intorno la medeſima AF.

Finalmente ſi dimoſtra il più ſtupendo teorema, che abbia fin' ora ſcoperto la geometria, cioè l' ugualità d' un ſolido iperbolico infinito con un cilindro totalmente limitato, ſecondo la nobile, e maraviglioſa invenzione del gran Torricelli; imperocchè ſia l' iperbole equilatera CD, i di cui aſintoti EA, BA poſti ſono ad angoli retti, ed inſcrittovi il rettangolo EDGA s' intenda rivolgerſi tutto lo ſpazio aſintotico EDCKBA infinitamente lungo verſo K d' intorno l' aſintoto AB, dico tutto queſto ſolido eſſere il doppio del cilindro nato dal rettangolo DEAG, e che conſeguentemente il ſolido infinitamente lungo nato dal ſolo ſpazio DCKBG è uguale al cilindro ſuddetto nato dal rettangolo DEAG, che ſerve come di piediſtallo al medeſimo ſolido infinito. Si tiri il diametro del rettangolo EG, e tiriſi qualſivoglia retta CI parallela all' aſintoto AB, ſegherà queſta la retta DG in F, e la retta EG in H, e tirata CB parallela all' altro aſintoto EA, è manifeſto per le coſe dimoſtrate, che ſta CI alla DE, come EA ad AI, o pure come la circonferenza deſcritta dal raggio AE a quella, che ſi deſcrive dal raggio AI, e però il rettangolo fatto dall' altezza CI nella circonferenza deſcritta dal raggio AI (cioè la ſuperficie cilindrica deſcritta dentro il ſolido iper-

Fig. 56.

Coroll. 2. della Prop. 27. di queſto

perbolico infinito dalla retta CI rivoltata intorno l'aſintoto BA) uguaglierà il rettangolo, che ha per altezza la DE, e per baſe la circonferenza deſcritta dal raggio EA (che ſarebbe la ſuperficie cilindrica deſcritta dalla retta DE nello ſteſſo rivolgimento) onde la ſuperficie cilindrica deſcritta dalla linea CI, a quella deſcritta dalla linea IF ſtarà come la ſuperficie cilindrica nata dalla linea DE alla ſuperficie nata dalla medeſima FI, cioè come la linea EA alla IA, o pure come CI a DE, o alla FI: e perchè ſi è veduto eſſere CI a DE, o pure alla FI, come EA ad AI, o pure DG a GF ovvero DE ad FH, cioè FI ad FH, ſarà ancora la ſuperficie, cilindrica nata dalla linea CI nel ſolido iperbolico verſo la ſuperficie cilindrica nata dalla linea FI, e racchiuſa dentro il cilindro prodotto dal rettangolo DEAG, come la retta FI del rettangolo alla retta FH nel triangolo DGE racchiuſa, e ciò ſempre ſuccederà in queſto modo, adunque tutte le ſuperficie cilindriche

che componenti il ſolido iperbolico, a tutte le ſuperficie cilindriche, che coſtituiſcono il ſuddetto cilindro, DEAG ſtanno come tutte le linee del rettangolo DEAG a tutte le linee del triangolo DGE, cioè in proporzione dupla, dunque il ſolido iperbolico infinitamente lungo, nato dallo ſpazio EDCKBA è duplo del cilindro generato dal rettangolo DEAG; e dividendo, il ſolido nato dallo ſpazio DCKBG uguaglia il cilindro ſuddetto, che quaſi piediſtallo gli reſta ſottopoſto; il che ſi doveva dimoſtrare.

IL FINE.

APPROVAZIONI

IL Molto Rever. Sig. Luca Giuſeppe Cerracchini Dottor di Sacra Teolog e Accad. Fiorentino ſi compiacerà leggere colla ſolita ſua attenzione il preſente breve *Trattato delle Sezioni Coniche*, e ſe in eſſo ſia coſa alcuna ripugnante alla Santa Fede, e buoni coſtumi, ec.

Orazio Mazzei Vic. Gen.

Data gli 31. Dicemb. 1721. ab Inc.

Illuſtriſs. e Rev. Monſig. Vic. Gen. Cap.

In eſecuzione de' ſtimatiſſimi comandi di VS. Illuſtriſs. e Reverendiſs. ho letto attentamente queſto *Trattatto delle Sezioni Coniche* compilato dal Reverendiſs. P. Abate Guido Grandi, e non avendovi trovato coſa alcuna che offender poſſa il cãdore della S. Fede, nè i buoni coſtumi lo giudico degno delle ſtampe con che mi dico

Di caſa 4. Gennajo 1721. ab Inc.

Di VS. Illuſtriſs. e Reverendiſs.

Devotiſs. umiliſs. Servo

P. Luca Giuſeppe Cerracchini Dott.
di S. T. nell' Univerſità Fiorentina.

Atteſo la ſopraddetta relazione ſi ſtampi

Orazio Mazzei Vic. Gen. Cap.

Imprimatur

Vice-Cancell. S. Officii Flor. de mandato.

Si ſtampi

Filippo Buonarroti Senat. e Aud. di S.A.R.

Tauola I

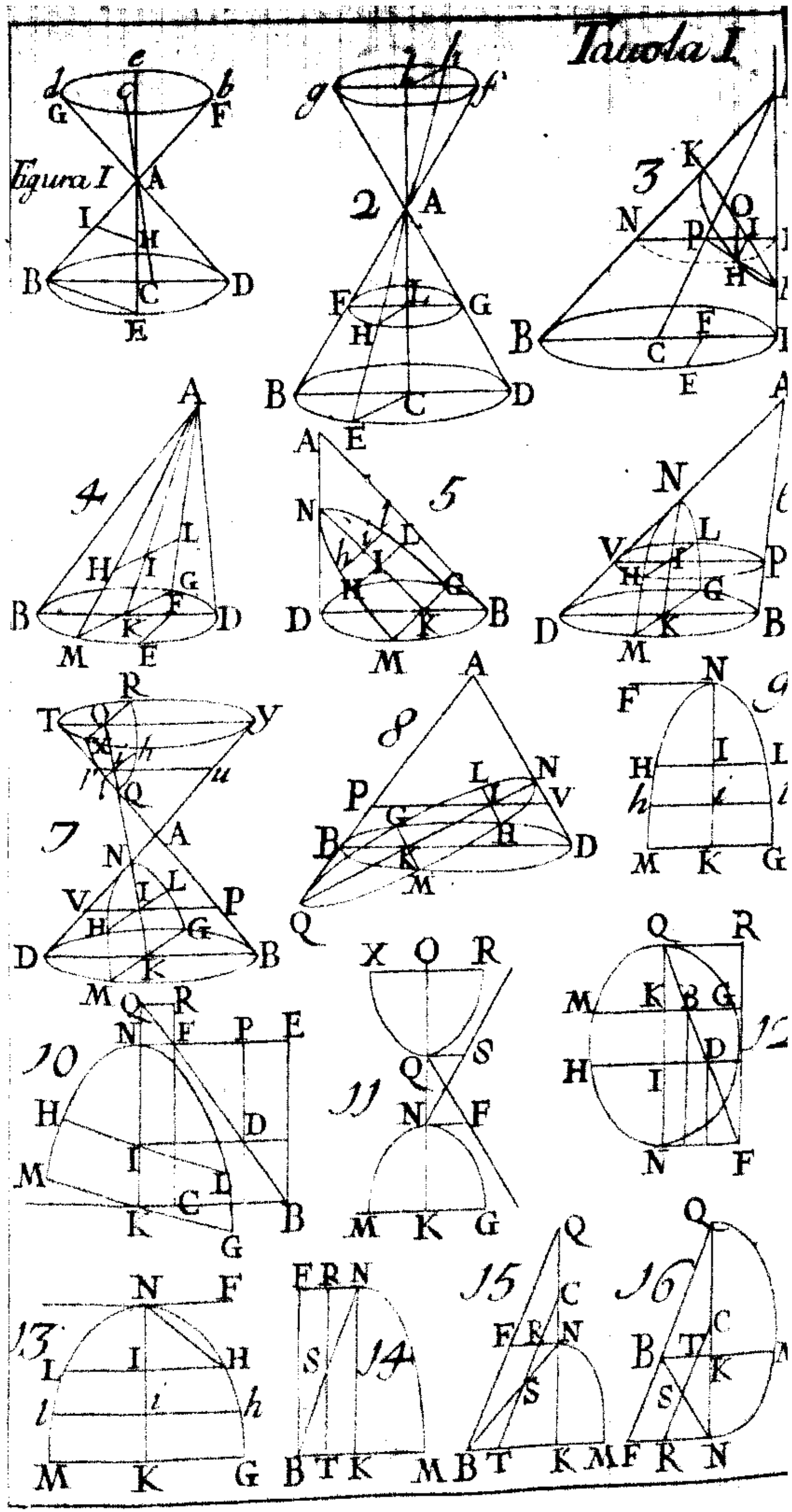
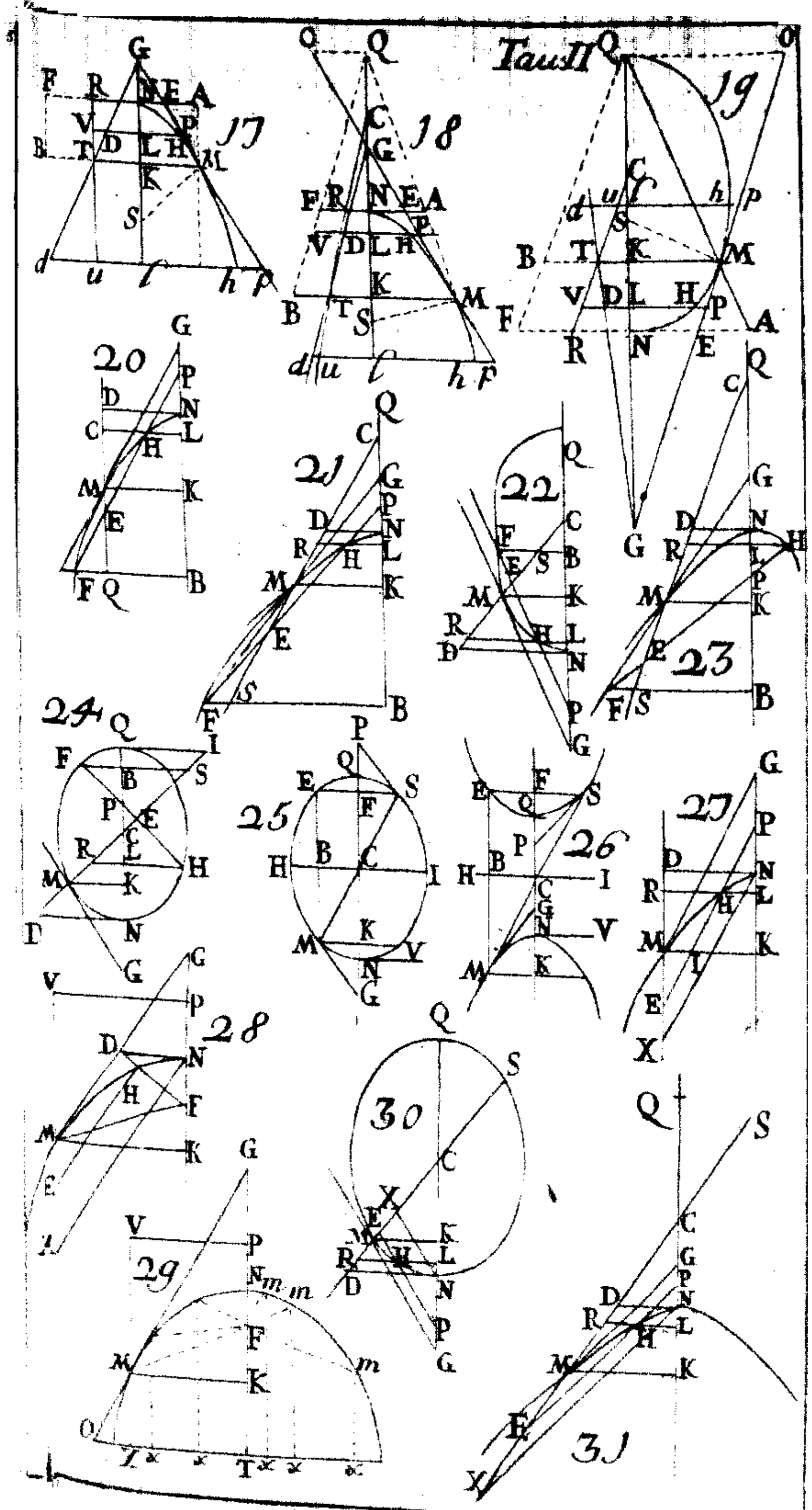
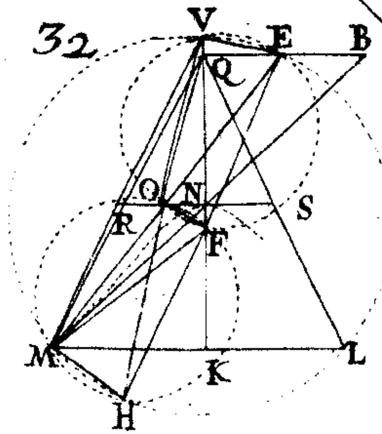
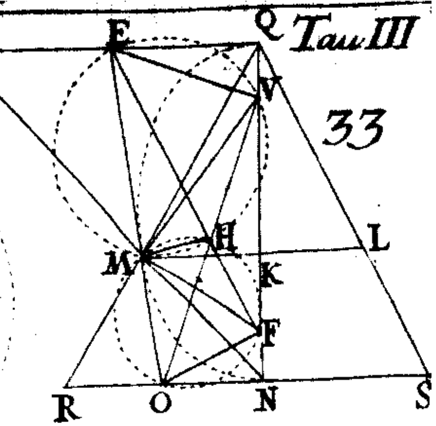


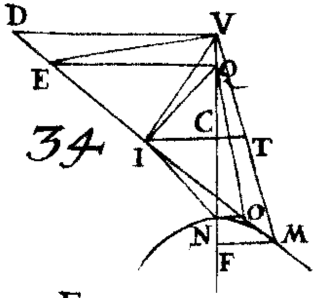
Figura I
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
d
e
c
b
g
h
f
i
l
u

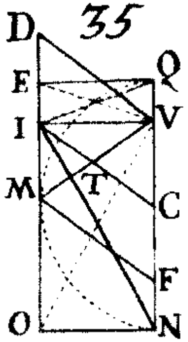

Tab. II
17
G F R N E A V P B T D L H M K S d u l h f
18
Q Q C G F R N E A P V D L H K B T S M d u l h f
19
Q O C u h p d S B T K M V D L H P F A R N E G
20
G P D N C L H M K E F Q B
21
Q C G D P N R L H M K E S F B
22
Q C F B E S M K R H L D N P G
23
Q C G D N R H L P M K E F S B
24
Q F B I S P E R C L H M K D N G
25
P Q E F S H B C I M K N V G
26
E F Q S P B H C I G N V M K
27
G P D N R L H M K I E X
28
G V P D N H F M K E I
29
G V P N m m F M K m O L x x T x x x
30
Q S C X E M K R H L D N P G
31
Q S C G P D N R L H M K E X

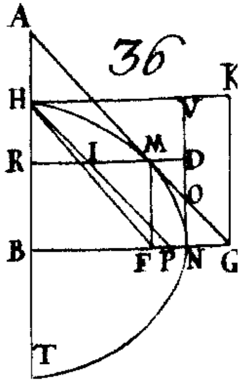
Tau III

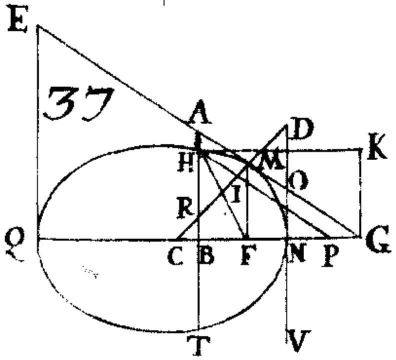

32
V
E
B
Q
O
N
S
R
F
M
K
L
H

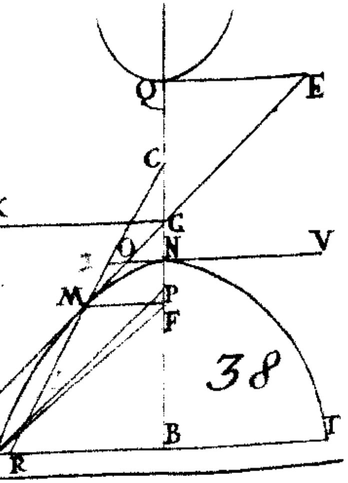

B
E
Q
V
33
H
L
M
K
F
R
O
N
S

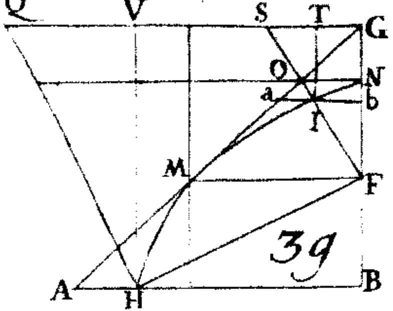

D
V
E
Q
34
I
C
T
O
N
M
F


D
35
Q
E
I
V
M
T
C
F
O
N

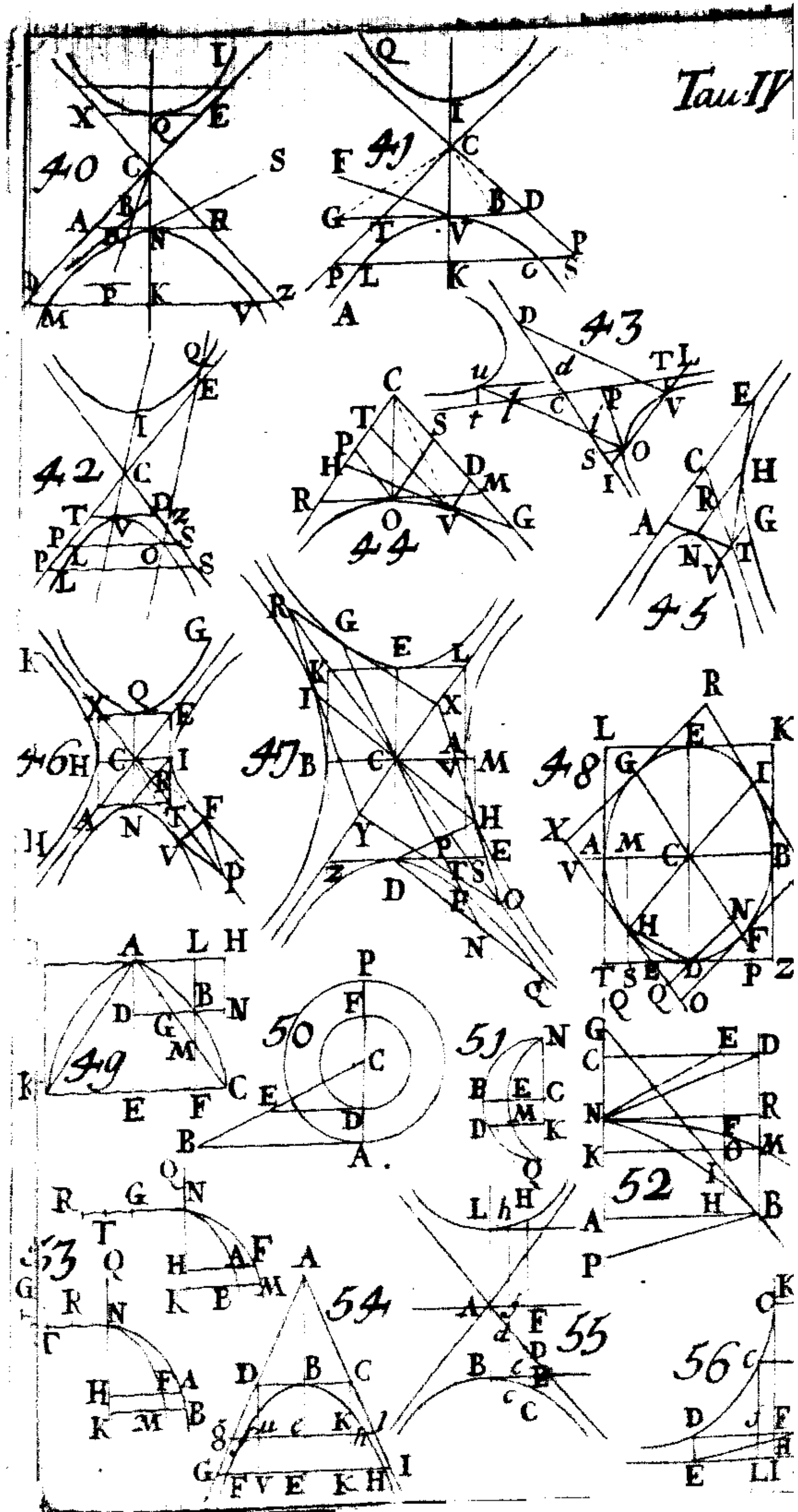

A
36
K
H
V
R
I
M
D
O
B
F
P
N
G
T


E
37
A
D
K
H
M
O
R
I
Q
C
B
F
N
P
G
T
V


Q
E
C
K
G
O
N
V
M
P
F
38
B
T

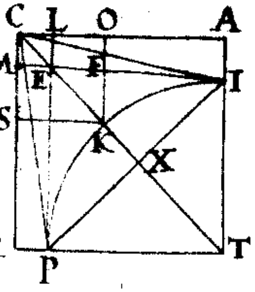

Q
V
S
T
G
O
N
a
b
I
M
F
39
A
H
B

Tau: IV

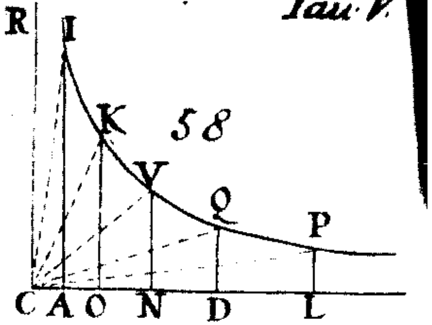


Tau. V.

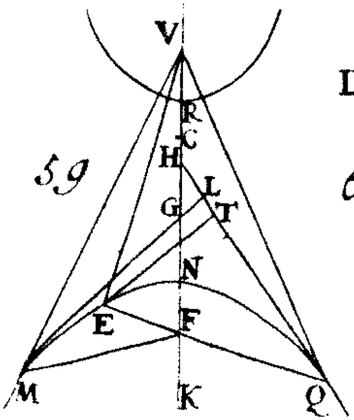
57



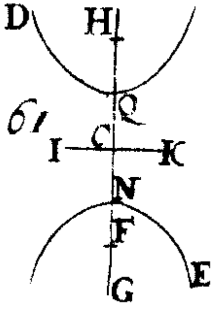
58



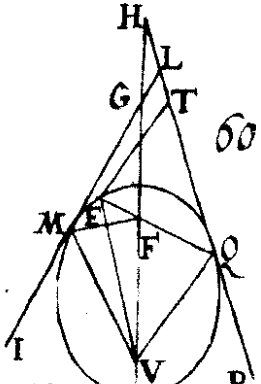
59



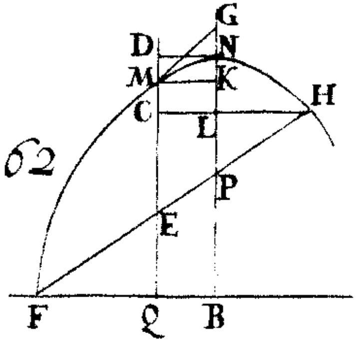
61



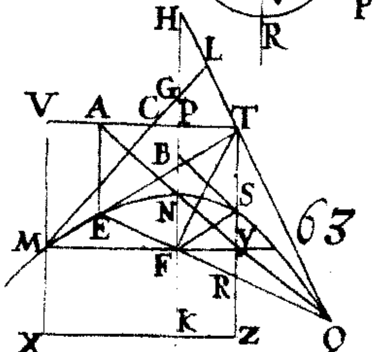
60



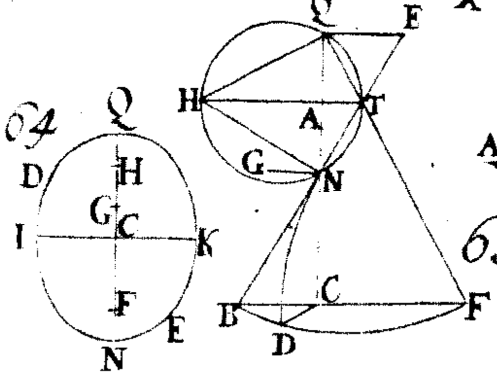
62



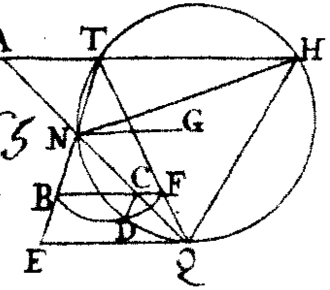
63



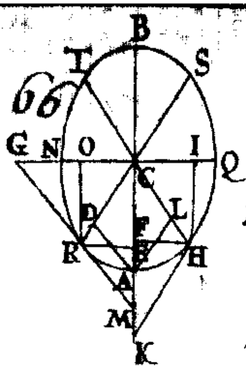
64

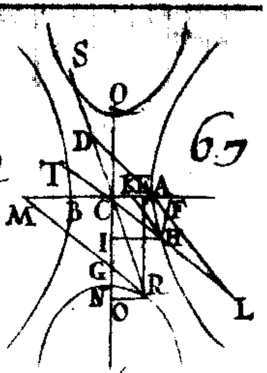


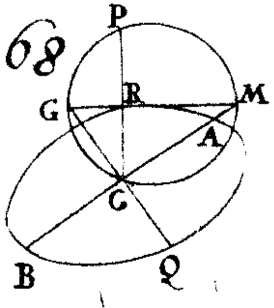
65

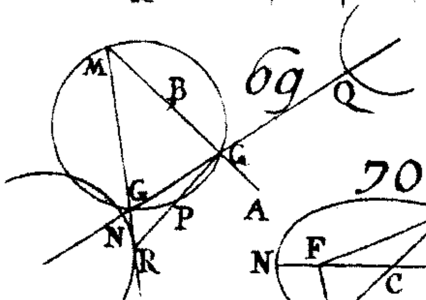


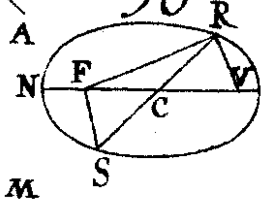
Tau VI

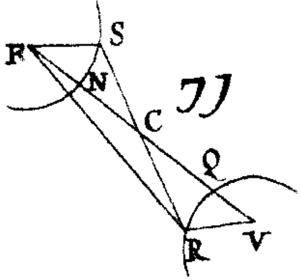
66


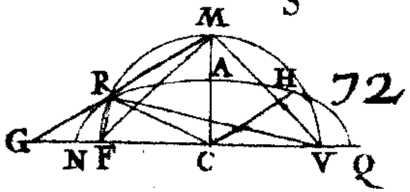
67


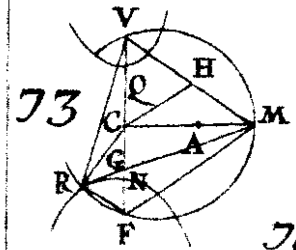
68


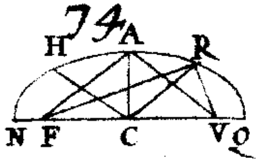
69


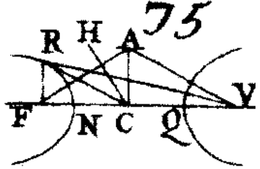
70


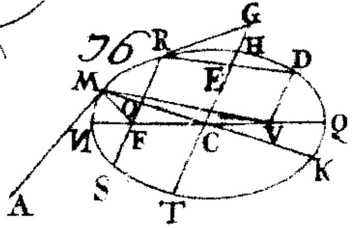
71


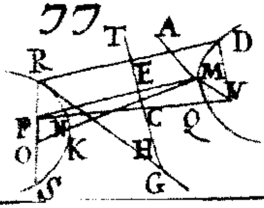
72


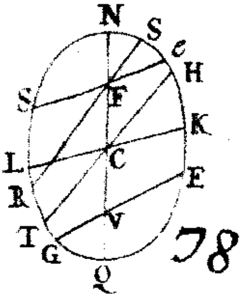
73


74


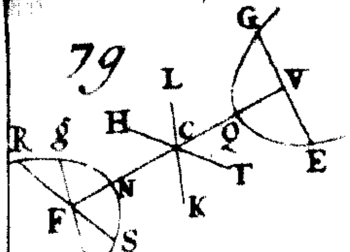
75


76


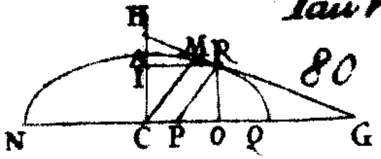
77


78


79

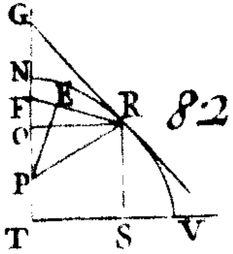


80

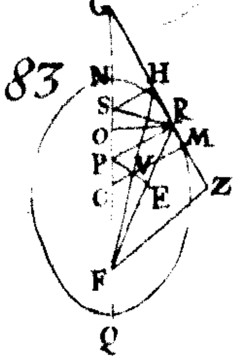


81

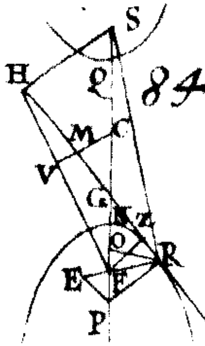
82



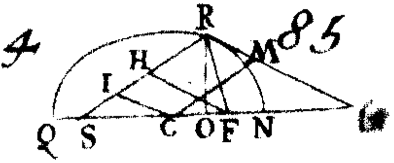
83



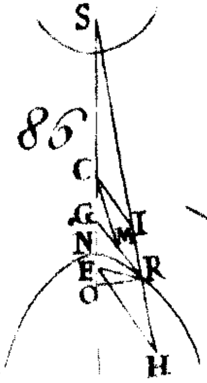
84



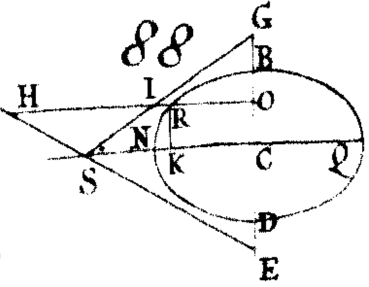
85



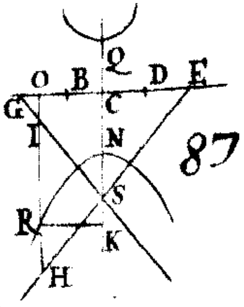
86



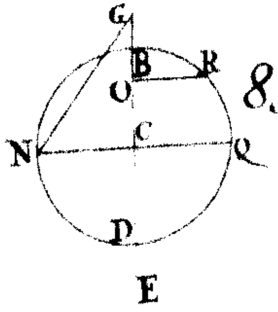
88



87



89



90